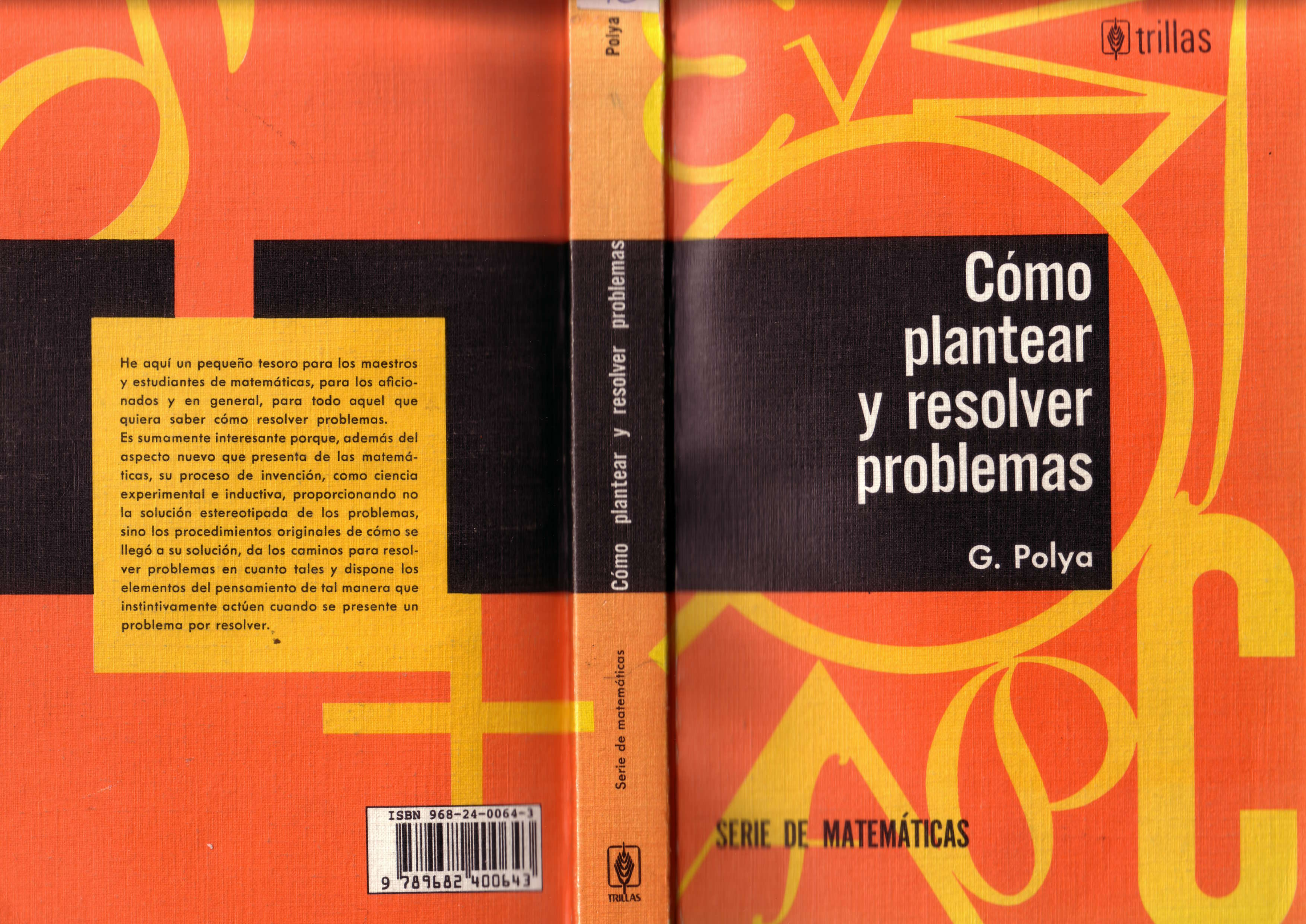
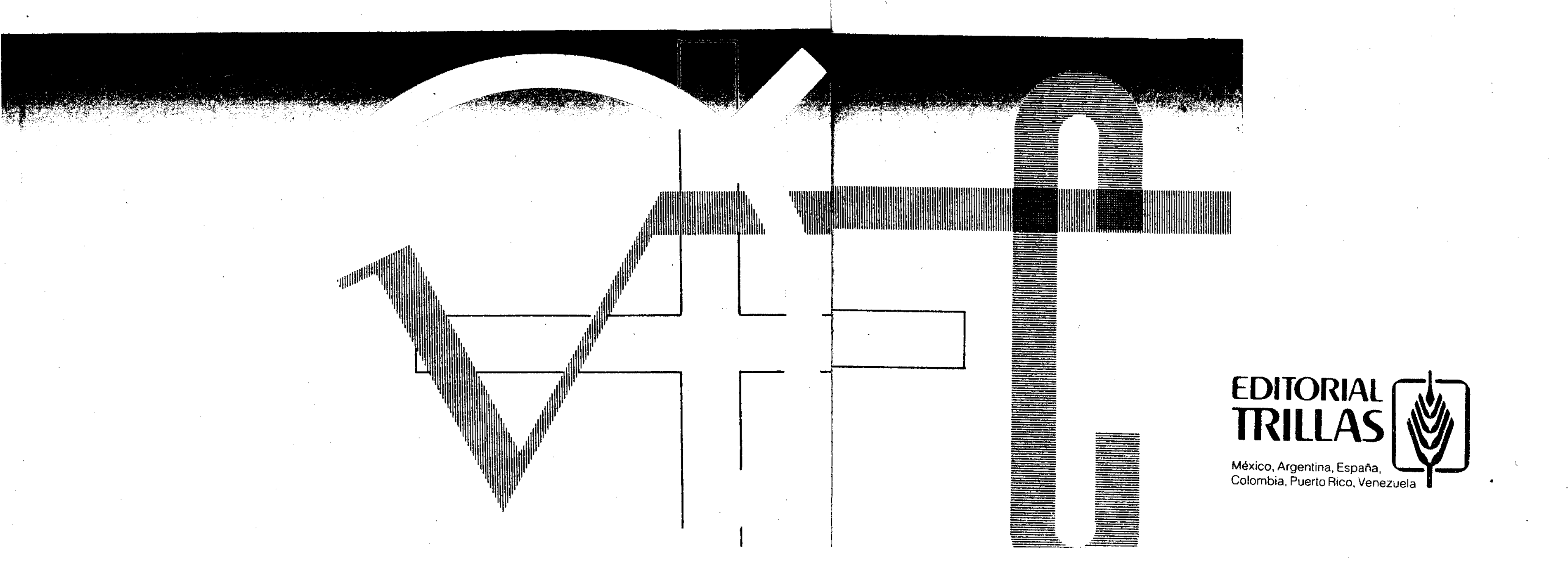

He aquí un pequeño tesoro para los maestros y estudiantes de matemáticas, para los aficionados y en general, para todo aquel que quiera saber cómo resolver problemas.
Es sumamente interesante porque, además del aspecto nuevo que presenta de las matemáticas, su proceso de invención, como ciencia experimental e inductiva, proporcionando no la solución estereotipada de los problemas, sino los procedimientos originales de cómo se llegó a su solución, da los caminos para resolver problemas en cuanto tales y dispone los elementos del pensamiento de tal manera que instintivamente actúen cuando se presente un problema por resolver.
ISBN 968-24-0064-3
9 789682 400643
Polya
Cómo plantear y resolver problemas
Serie de matemáticas
TRILLAS
trillas
Cómo plantear y resolver problemas
G. Polya
SERIE DE MATEMÁTICAS

Cómo plantear y resolver problemas

G. Polya



EDITORIAL TRILLAS
México, Argentina, España, Colombia, Puerto Rico, Venezuela

Traducción
Prof. Julián Zugazagoitia

Título de esta obra en inglés:
How to solve it

Versión autorizada en español
de la segunda edición en inglés
publicada por Achor Books

Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición en español, 1965 (ISBN 968-24-0064-3)
Reimpresiones, 1969, 1970, 1972, 1974, 1975, 1976,
1978, 1979, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986 y 1987

Decimoquinta reimpresión, febrero 1989

Impreso en México
Printed in Mexico

Prefacio a la primera edición en inglés

Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter.

Por ello, un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.

Un estudiante cuyos estudios incluyan cierto grado de matemáticas tiene también una particular oportunidad. Dicha oportunidad se pierde, claro está, si ve las matemáticas como una materia de la que tiene que presentar un examen final y de la cual no volverá a ocuparse una vez pasado éste. La oportunidad puede perderse incluso si el estudiante tiene un talento natural para las matemáticas, ya que él, como cualquier otro, debe descubrir sus capacidades y sus aficiones; no puede saber si le gusta el pastel de frambuesas si nunca lo ha probado. Puede descubrir, sin embargo, que un problema de matemáticas puede ser tanto o más divertido que un crucigrama, o que un vigoroso trabajo intelectual puede ser un ejercicio tan agradable como un ágil juego de tenis. Habiendo gustado del placer de las matemáticas, ya no las olvidará fácilmente, presentándose entonces una

buena oportunidad para que las matemáticas adquieran un sentido para él, ya sean como un pasatiempo o como herramienta de su profesión, o su profesión misma o la ambición de su vida.

El autor recuerda el tiempo en que él era estudiante, un estudiante un tanto ambicioso, con deseos de penetrar un poco en las matemáticas y en la física. Asistía a conferencias, leía libros, tratando de asimilar las soluciones y los hechos presentados, pero siempre se presentaba una interrogante que lo perturbaba sin cesar: "Sí, la solución dada al problema parece ser correcta, pero ¿cómo es posible descubrir tal solución? Sí, este experimento al parecer es correcto, tal parece que es un hecho; pero, ¿cómo pueden descubrirse tales hechos?; ¿y cómo puedo yo por mí mismo inventar o descubrir tales cosas?" Hoy en día el autor enseña matemáticas en una universidad. Piensa o desea que algunos de sus más aventajados alumnos se planteen preguntas similares y trata de satisfacer su curiosidad. Tratando de comprender no sólo la solución de este o de aquel problema, sino también los motivos y el procedimiento de la solución, y tratando de hacer comprender dichos motivos y procedimientos, ha sido llevado finalmente a escribir el presente libro. Desea que resulte de utilidad a aquellos maestros que quieren desarrollar las aptitudes de sus alumnos para resolver problemas, y para aquellos alumnos ansiosos de desarrollar sus propias aptitudes.

Pese a que el presente libro pone especial atención a los requerimientos de los estudiantes y maestros de matemáticas, debería de despertar el interés de todos aquellos interesados en los caminos y medios de la invención y del descubrimiento. Tal interés puede ser mayor que el que uno puede sospechar sin reflexión previa. El espacio dedicado en los periódicos y revistas a los crucigramas y otros acertijos parece demostrar que el público dedica un cierto tiempo a resolver problemas sin ningún interés práctico. Detrás del deseo de resolver este o aquel problema que no aporta ventaja material alguna, debe haber una honda curiosidad, un deseo de comprender los caminos y medios, los motivos y procedimientos de la solución.

Las páginas que siguen, escritas en forma un tanto concisa y, en la medida de lo posible, en forma sencilla, están basadas en un serio y largo

estudio de los métodos de solución. Esta clase de estudio, llamado *heurístico* por algunos autores, si bien no está de moda en nuestros días, tiene un largo pasado y quizá un cierto futuro.

Estudiando los métodos de solución de problemas, percibimos otra faceta de las matemáticas. En efecto, las matemáticas presentan dos caras: por un lado son la ciencia rigurosa de Euclides, pero también son algo más. Las matemáticas presentadas a la manera euclideana aparecen como una ciencia sistemática, deductiva; pero las matemáticas en vía de formación aparecen como una ciencia experimental, inductiva. Ambos aspectos son tan viejos como las matemáticas mismas. Pero el segundo es nuevo en cierto aspecto; en efecto, las matemáticas *in statu nascendi,* en el proceso de ser inventadas, nunca han sido presentadas al estudiante, ni incluso al maestro, ni al público en general.

La heurística tiene múltiples ramificaciones: los matemáticos, los logistas, los psicólogos, los pedagogos e incluso los filósofos pueden reclamar varias de sus partes como pertenecientes a su dominio especial. El autor, consciente de la posibilidad de críticas provenientes de los más diversos medios y muy al tanto de sus limitaciones, se permite hacer observar que tiene cierta experiencia en la solución de problemas y en la enseñanza de matemáticas en diversos niveles.

El tema es tratado más ampliamente en un extenso libro que el autor está en camino de terminar.

Universidad de Stanford, agosto 1º, 1944.

Prefacio a la séptima reimpresión en inglés

Ahora puedo decir gustoso que he cumplido con éxito, al menos en parte, una promesa dada en el prefacio a la primera edición: Los dos volúmenes *Induction and Analogy in Mathematics* y *Patterns of Plausible Inference* que constituyen mi reciente obra *Mathematics and Plausible Reasoning* continúan la línea del pensamiento adoptada en el presente libro.

Zurich, agosto 30, 1954.

Prefacio a la segunda edición en inglés

En esta segunda edición se incluye, además de algunas mejoras, una nueva cuarta parte: Problemas, Sugerencias, Soluciones.

Al tiempo que se preparaba la impresión de esta edición, apareció un estudio (*Educational Testing Service, Princeton, N.J.*; cf. *Time* 18 de junio, 1956) que al parecer ha formulado algunas observaciones pertinentes; no eran nuevas para los entendidos en la materia, pero ya era tiempo que se formulasen para el público en general: "... las matemáticas tienen el dudoso honor de ser el tema menos popular del plan de estudios... Futuros maestros pasan por las escuelas elementales aprendiendo a detestar las matemáticas ... Regresan a la escuela elemental a enseñar a nuevas generaciones a detestarlas".

Espero que la presente edición, destinada a más amplia difusión, convenza a algunos de sus lectores de que las matemáticas, aparte de ser un camino necesario a la ingeniería y al conocimiento científico, pueden ser divertidas y a la vez abrir un panorama en las actividades intelectuales del más amplio nivel.

Zurich, junio 30, 1956.

Índice de contenido

Segunda parte
Cómo resolver un problema: un diálogo

Tercera parte
Breve diccionario de heurística

Cuarta parte
Problemas, sugerencias, soluciones

Para resolver un problema se necesita:

I Comprender el problema

II Concebir un plan

Determinar la relación entre los datos y la incógnita.

De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares.

Obtener finalmente un **plan** de solución.

III Ejecución del plan

IV Examinar la solución obtenida

Comprender el problema

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Visión retrospectiva

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Introducción

Las consideraciones expuestas en el libro hacen referencia y constituyen el desarrollo de la precedente lista de preguntas y sugerencias titulada "Para resolver un problema..." Toda pregunta o sugerencia que de ella se cite aparecerá impresa en *cursiva* y cuando nos refiramos a ella lo haremos simplemente como "la lista" o "nuestra lista".

En las páginas que siguen se discutirá el propósito de la lista, se ilustrará su uso práctico por medio de ejemplos y se explicarán las nociones fundamentales y las operaciones intelectuales. A modo de explicación preliminar se puede decir que si se hace uso correcto de ella, y se plantean asimismo dichas preguntas y sugerencias en forma adecuada, éstas pueden ayudar a resolver el problema. Asimismo si se plantean estas preguntas adecuadamente a los alumnos y se les hacen estas sugestiones, se les podrá ayudar a resolver sus problemas.

El libro consta de cuatro partes.

La primera, titulada: "En el salón de clases", contiene veinte secciones. Cada sección estará enumerada con tipo negro, como por ejemplo "sección 4".

De la sección **1** a la **5** se discutirá en términos generales el "propósito" de nuestra lista. De la **6** a la **17** se exponen cuáles son las "divisiones principales" y las "principales preguntas" de la lista, y se discutirá el primer ejemplo práctico. En las secciones **18**, **19** y **20** se incluyen "otros ejemplos".

La segunda parte, que es muy breve, titulada: "Cómo resolver un problema", aparece escrita en forma de diálogo. Un supuesto maestro responde a las breves preguntas que le plantea un alumno un tanto idealizado también.

La tercera y más extensa de las partes es un "Breve diccionario de heurística". Nos referiremos a él como el "diccionario". Contiene sesenta y siete artículos ordenados alfabéticamente. Por ejemplo, el significado del término HEURÍSTICA (impreso en versalitas o pequeñas mayúsculas) se expone en la página 101 en un artículo bajo dicho título. Cuando en el texto se haga referencia a uno de tales artículos, su título aparecerá impreso en versalitas. Ciertos párrafos de algunos artículos son más téc-

nicos; éstos se hallarán encerrados en corchetes. Algunos artículos están estrechamente relacionados con la primera parte proporcionándole ilustraciones adicionales y observaciones más específicas. Otros van un tanto más allá del objeto de la primera parte, de la que proporcionan explicaciones más a fondo. Hay un artículo clave sobre HEURÍSTICA MODERNA. En él se exponen las relaciones entre los diversos artículos, así como el plan fundamental del diccionario. Contiene también indicaciones de cómo encontrar información sobre detalles particulares de la lista. Nos parece necesario destacar, dado que los artículos del diccionario son aparentemente muy variados, el hecho de que existe en su elaboración un plan general que encierra una cierta unidad. Hay algunos artículos un poco más extensos, si bien dedicados a una concisa y sistemática discusión de algún tema general. Otros contienen comentarios más específicos, mientras que otros abordan referencias históricas, citas e incluso chistes.

El diccionario no debe leerse con premura. Con frecuencia su contexto es conciso y otras un tanto sutil. El lector podrá recurrir a él para informarse sobre un punto en particular. Si dichos puntos provienen de su experiencia con sus propios problemas o con los de sus alumnos, su lectura tiene todas las probabilidades de ser de provecho.

La cuarta parte lleva por título: "Problemas, sugerencias, soluciones". Plantea algunos problemas para un lector más ambicioso. A cada problema le sigue (a distancia conveniente) una "sugerencia" que puede revelar el camino del resultado, el cual es explicado en la "solución".

En repetidas ocasiones nos hemos referido al "alumno" y al "maestro" y seguiremos haciéndolo una y otra vez. Es conveniente aclarar que al referirnos al "alumno", hablamos en términos generales de cualquier persona que esté estudiando matemáticas, ya sean de bachillerato, ya de grado universitario. Al igual, el "maestro" puede ser un maestro de bachillerato o de universidad, o cualquier persona interesada en la técnica de la enseñanza de las matemáticas. El autor adopta unas veces el punto de vista del alumno, otras el del maestro (este último principalmente en la primera parte). Sin embargo, la mayor parte de las veces (especialmente en la tercera parte) adopta el punto de vista de una persona, ni alumno ni maestro, ansiosa de resolver un problema que se le ha planteado.

Primera parte

En el salón de clases

PROPOSITO

1. Ayudar al alumno. Una de las más importantes tareas del maestro es ayudar a sus alumnos. Tarea nada fácil. Requiere tiempo, práctica, dedicación y buenos principios.

El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se le deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi sin ninguna, puede que no progrese. Por otra parte, si el maestro le ayuda demasiado, nada se le deja al alumno. El maestro debe ayudarle, pero no mucho ni demasiado poco, de suerte que le deje asumir *una parte razonable del trabajo.*

Si el estudiante no está en condiciones de hacer gran cosa, el maestro debe mantenerle al menos la ilusión del trabajo personal. Para tal fin, el maestro debe ayudar al alumno discretamente, *sin imponérsele.*

Lo mejor es, sin embargo, ayudar al alumno en forma natural. El maestro deberá ponerse en su lugar, ver desde el punto de vista del alumno, tratar de comprender lo que le pasa por la mente, y plantear una pregunta o indicar algún camino que *pudiese ocurrírsele al propio alumno.*

2. Preguntas, recomendaciones, operaciones intelectuales. Al tratar de ayudar al alumno en forma efectiva y natural, sin imponérsele, el maestro puede hacer la misma pregunta e indicar el mismo camino una y otra vez. Así, en innumerables problemas, tenemos que hacer la pregunta: *¿Cuál es la incógnita?* Podemos cambiar el vocabulario y hacer la misma pregunta en diferentes formas: ¿Qué se requiere?; ¿qué quiere usted determinar?; ¿qué se le pide a usted que encuentre? El propósito de estas preguntas es concentrar la atención del alumno sobre la incógnita. A veces se obtiene el mismo resultado de modo más natural sugiriendo: *Mire atentamente la incógnita.* Preguntas y sugerencias tienen el mismo fin; tienden a provocar la misma operación intelectual.

Nos ha parecido que podría ser interesante el juntar y agrupar las preguntas y sugerencias particularmente útiles en la discusión de problemas con los alumnos. La lista que presentamos contiene preguntas y sugerencias de ese tipo, cuidadosamente elegidas y clasificadas; pueden ser igualmente útiles a aquellas personas que trabajen solas en la resolución de problemas. Si el lector conoce la lista lo suficiente como para poder discernir detrás de la sugerencia la acción sugerida, se dará cuenta que la susodicha

lista menciona, indirectamente, *las operaciones intelectuales particularmente útiles para la solución de problemas*. Dichas operaciones se han mencionado en el orden más probable de su aparición.

3. **La generalidad** es una de las características importantes de las preguntas y sugerencias que contiene nuestra lista. Tómense las preguntas: *¿Cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?; ¿cuál es la condición?* Esas preguntas son aplicables en general, podemos plantearlas eficazmente en toda clase de problemas. Su uso no está restringido a un determinado tema. Ya sea un problema algebraico o geométrico, matemático o no, teórico o práctico, un problema serio o una mera adivinanza, las preguntas tienen un sentido y ayudan a esclarecer el problema.

De hecho, existe una **restricción,** pero que nada tiene que ver con el tema del problema. Ciertas preguntas y sugerencias de la lista son aplicables exclusivamente a los "problemas de determinación" y no a los "problemas de demostración".

Si estamos en presencia de un problema de este último género debemos emplear preguntas diferentes. (Véase "PROBLEMAS POR RESOLVER, PROBLEMAS POR DEMOSTRAR, página 161.)

4. **Sentido común.** Las preguntas y sugerencias de nuestra lista son generales, pero, pese a su generalización, son naturales, sencillas, obvias y proceden del más simple sentido común. Tómese la sugerencia: *Mire la incógnita y trate de pensar en un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una semejante.* Esta sugerencia le aconseja hacer lo que usted haría de todas formas, aun sin consejo, si está decidido a resolver su problema. ¿Tiene hambre? Usted quiere procurarse algún alimento y piensa en las formas habituales de procurárselo. ¿Tiene un problema de construcción geométrica? Quiere construir un triángulo y piensa en las formas habituales de construir un triángulo. ¿Tiene un problema cualquiera? Quiere encontrar una cierta incógnita y piensa en las formas habituales de encontrar una incógnita de ese tipo o una incógnita similar. Obrando así, usted está en la línea de la sugerencia mencionada en nuestra lista. Y está también sobre el buen camino: la sugerencia es buena, le sugiere un camino a seguir que le llevará con frecuencia al éxito.

Todas las preguntas y sugerencias de nuestra lista son naturales, sencillas, obvias y no proceden más que del sentido común, pero expresan dicho sentido común en términos generales. Sugieren una cierta conducta que debe presentarse en forma natural en la mente de cualquiera que tenga un cierto sentido común y un serio deseo de resolver el problema que se le ha propuesto. Pero la persona que procede así, en general no se preocupa por hacer explícito claramente su comportamiento o no es capaz de hacerlo. Nuestra lista trata precisamente de hacerlo explícito.

5. **Maestro y alumno. Imitación y práctica.** Cuando el profesor hace a sus alumnos una pregunta o una sugerencia de la lista, puede proponerse dos fines. Primero, el ayudar al alumno a resolver el problema en cuestión. Segundo, el desarrollar la habilidad del alumno de tal modo que pueda resolver por sí mismo problemas ulteriores.

La experiencia muestra que las preguntas y sugerencias de la lista, empleadas apropiadamente, ayudan con frecuencia al alumno. Tienen dos características comunes, el sentido común y la generalización. Como provienen del sentido común, se presentan con frecuencia de un modo natural; se le podrían ocurrir al propio alumno. Como son generales, ayudan sin imponerse, indicando una dirección general, pero dejando al alumno mucho por hacer.

Sin embargo, los dos resultados que mencionábamos antes están estrechamente ligados. En efecto, si el alumno logra resolver con éxito el problema en cuestión, está desarrollando su habilidad en la resolución de problemas. Conviene, pues, no olvidar que nuestras preguntas son generales y aplicables a numerosos casos. Si el alumno emplea la misma pregunta varias veces con buen resultado, sin duda se fijará en ella y a ella recurrirá cuando se encuentre en un caso similar. Si se hace esa misma pregunta varias veces, acabará tal vez por deducir la idea exacta. Mediante tal éxito, descubrirá la manera correcta de emplear la pregunta y será entonces cuando realmente la habrá asimilado.

El alumno puede llegar a retener ciertas preguntas de nuestra lista al grado de ser finalmente capaz de hacerse a sí mismo la pregunta indicada en el momento adecuado y de efectuar con toda naturalidad la operación intelectual correspondiente. Este alumno habrá logrado con toda seguridad el máximo provecho posible de nuestra lista. ¿Cómo puede el maestro obtener este excelente resultado?

El resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica como, por ejemplo, el nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de nadar imitamos los movimientos de pies y manos que hacen las personas que logran así mantenerse a flote, y finalmente aprendemos a nadar practicando la natación. Al tratar de resolver problemas, hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes, y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos.

El profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica. Si el maestro quiere desarrollar en sus alumnos el proceso mental que corresponde a las preguntas y sugerencias de nuestra lista, debe emplearlas tantas veces como vengan al caso de un modo natural. Además, cuando el maestro resuelve un proble-

ma ante la clase, debe "dramatizar" un poco sus ideas y hacerse las mismas preguntas que emplea para ayudar a sus alumnos. Gracias a tales consejos, el alumno descubrirá, sin duda, la manera de utilizar las preguntas y sugerencias y adquirirá así conocimientos más importantes que los de un simple hecho matemático.

DIVISIONES PRINCIPALES, PREGUNTAS PRINCIPALES

6. **Cuatro fases.** Al tratar de encontrar la solución podemos cambiar repetidamente nuestro punto de vista, nuestro modo de considerar el problema. Tenemos que cambiar de posición una y otra vez. Nuestra concepción del problema será probablemente incompleta al empezar a trabajar; nuestra visión será diferente cuando hayamos avanzado un poco y cambiará nuevamente cuando estemos a punto de lograr la solución.

A fin de agrupar en forma cómoda las preguntas y sugerencias de nuestra lista, distinguiremos cuatro fases del trabajo. Primero, tenemos que *comprender* el problema, es decir, ver claramente lo que se pide. Segundo, tenemos que captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga a la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un *plan*. Tercero, poner en *ejecución* el plan. Cuarto, *volver atrás* una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla.

Cada una de estas fases es importante. Puede suceder que a un alumno se le ocurra por casualidad una idea excepcionalmente brillante y saltándose todo el trabajo preparatorio, vaya directamente a la solución. Tales golpes de suerte son deseables, naturalmente, pero puede llegarse a un resultado no deseado, desafortunado, si el alumno descuida cualquiera de las cuatro fases sin tener una buena idea. Es de temerse lo peor si el alumno se lanza a hacer cálculos o construcciones sin haber *comprendido* el problema. Generalmente es inútil ocuparse de los detalles si no se han visto las relaciones esenciales o sin haber trazado un plan previo. Se pueden evitar muchos errores si el alumno *verifica cada paso* al llevar al cabo el plan. Los mejores resultados pueden perderse si el alumno no reexamina, no *reconsidera* la solución obtenida.

7. **Comprensión del problema.** Es tonto el contestar a una pregunta que no se comprende. Es deplorable trabajar para un fin que no se desea. Sin embargo, tales errores se cometen con frecuencia, dentro y fuera de la escuela. El maestro debe tratar de evitar que se produzcan en su clase. El alumno debe comprender el problema. Pero no sólo debe comprenderlo, sino también debe desear resolverlo. Si hay falta de comprensión o de interés por parte del alumno, no siempre es su culpa; el problema debe escogerse adecuadamente, ni muy difícil ni muy fácil, y debe dedicarse un cierto tiempo a exponerlo de un modo natural e interesante.

Ante todo, el enunciado verbal del problema debe ser comprendido. El maestro puede comprobarlo, hasta cierto punto, pidiéndole al alumno que repita el enunciado, lo cual deberá poder hacer sin titubeos. El alumno deberá también poder separar las principales partes del problema, la incógnita, los datos, la condición. Rara vez puede el maestro evitar las preguntas: *¿Cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?; ¿cuál es la condición?*

El alumno debe considerar las principales partes del problema atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada al problema, debe *dibujar la figura* y destacar en ella la incógnita y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente *introducir una notación* adecuada; poniendo cuidado en la apropiada elección de los signos, está obligado a considerar los elementos para los cuales los signos deben de ser elegidos. Hay otra pregunta que puede plantearse en este momento, con tal de que no se espere una respuesta definitiva, sino más bien provisional o una mera conjetura: ¿Es posible satisfacer la condición?

(En la exposición de la 2ª parte, pág. 51, "Comprender el problema" está dividido en dos partes: "Familiarizarse" y "Trabajar para una mejor comprensión".)

8. **Ejemplo.** Ilustremos algunos de los puntos expuestos en la sección anterior. Tomemos el siguiente problema, muy sencillo: *Determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular dados su longitud, su ancho y su altura.*

Para poder discutir este problema con provecho, los alumnos deben estar familiarizados con el teorema de Pitágoras y con algunas de sus aplicaciones en la geometría plana, pero pueden no tener más que ligeros conocimientos de la geometría del espacio. El maestro puede confiar aquí en la familiaridad intuitiva del alumno con las relaciones en el espacio.

El maestro puede hacer interesante el problema concretándolo. En efecto, el salón de clase es un paralelepípedo rectangular cuyas dimensiones pueden ser medidas, estimadas; los alumnos tienen que determinar, "medir de un modo indirecto", la diagonal del salón. El maestro señala la longitud, el ancho y la altura del salón, indica la diagonal con un gesto y da cierta vida a la figura que ha trazado en el pizarrón, refiriéndose repetidamente al salón de clase.

El diálogo entre el maestro y los alumnos puede empezar como sigue:

¿Cuál es la incógnita?

—La longitud de la diagonal de un paralelepípedo rectangular.

¿Cuáles son los datos?

—La longitud, el ancho y la altura del paralelepípedo.

—*Introduzcan una notación adecuada.* ¿Qué letra designará a la incógnita?

—*x*.

—¿Qué letras quieren ustedes elegir para designar a la longitud, al ancho y a la altura?

—*a, b, c*.

—*¿Cuál es la condición* que relaciona *a, b* y *c* con *x?*

—*x* es la diagonal del paralelepípedo del cual *a, b* y *c* son la longitud, el ancho y la altura.

—¿Es éste un problema razonable? Quiero decir, *¿es suficiente la condición para determinar la incógnita?*

—Sí, lo es. Si conocemos *a, b* y *c*, conocemos el paralelepípedo. Si el paralelepípedo está determinado, su diagonal también lo está.

9. **Concepción de un plan.** Tenemos un plan cuando sabemos, al menos a "grosso modo", qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita. De la comprensión del problema a la concepción del plan, el camino puede ser largo y tortuoso. De hecho, lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan. Esta idea puede tomar forma poco a poco o bien, después de ensayos aparentemente infructuosos y de un periodo de duda, se puede tener de pronto una "idea brillante". Lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirlo a esa idea brillante ayudándole, pero sin imponérsele. Las preguntas y sugerencias de las que vamos a hablar, tienen por objeto provocar tales ideas.

Para comprender la posición del alumno, el maestro debe pensar en su propia experiencia, en sus propias dificultades y éxitos en la resolución de problemas.

Sabemos, claro está, que es difícil tener una buena idea si nuestros conocimientos son pobres en la materia, y totalmente imposible si la desconocemos por completo. Las buenas ideas se basan en la experiencia pasada y en los conocimientos adquiridos previamente. Un simple esfuerzo de memoria no basta para provocar una buena idea, pero es imposible tener alguna sin recordar ciertos hechos pertinentes a la cuestión. Los materiales por sí solos no permiten la construcción de una casa, pero es imposible construir una casa sin juntar los materiales necesarios. Los materiales necesarios para la solución de un problema de matemáticas son ciertos detalles particulares de conocimientos previamente adquiridos, tales como problemas resueltos, teoremas demostrados. Por ello es con frecuencia adecuado abordar un trabajo planteándose la siguiente pregunta: *¿Conoce algún problema relacionado?*

La dificultad estriba en que hay por lo general una infinidad de problemas que se relacionan de alguna manera con el que nos ocupa, es decir, que tienen ciertos puntos en común con él. ¿Cómo escoger entre tantos, aquel o aquellos que puedan ser realmente útiles? Una sugerencia nos va a permitir descubrir un punto común esencial: *Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.*

Si llegamos a recordar algún problema ya resuelto que esté estrechamente relacionado con nuestro problema actual, podemos considerarnos con suerte. Debemos tratar de merecer tal suerte y podemos merecerla sabiéndola explotar. *He aquí un problema relacionado con el suyo y ya resuelto. ¿Puede usted hacer uso de él?*

Las preguntas anteriores, bien comprendidas y seriamente examinadas, ayudan muchas veces a provocar el encadenamiento correcto de las ideas; pero no siempre es el caso, ya que no son fórmulas mágicas. Nos hace falta entonces buscar otro punto de contacto y explorar los diversos aspectos de nuestro problema. Debemos cambiar, transformar o modificar el problema. *¿Puede enunciarse el problema en forma diferente?* Ciertas cuestiones de nuestra lista sugieren medios específicos para variar el problema, tales como la generalización, la particularización, el empleo de la analogía, el descartar una parte de la condición, y así por el estilo. Todos estos detalles son importantes, pero por el momento no podemos ahondar en ellos. Una modificación del problema puede conducirnos a algún otro problema auxiliar apropiado: *Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema relacionado con él.*

Al tratar de utilizar otros problemas o teoremas que ya conocemos, considerando las diversas transformaciones posibles, experimentando con diversos problemas auxiliares, podemos desviarnos y alejarnos de nuestro problema primitivo, al grado de correr el riesgo de perderlo totalmente de vista. Aquí una buena pregunta nos puede conducir de nuevo a él: *¿Ha empleado todos los datos?; ¿ha hecho uso de toda la condición?*

10. **Ejemplo.** Volvamos al ejemplo considerado en la sección 8. Lo habíamos dejado en el momento en que los alumnos comenzaban a comprender el problema y a manifestar un cierto interés. En ese momento pueden tener algunas ideas propias, ciertas iniciativas. Si el maestro, después de observar atentamente la clase, no puede descubrir ningún indicio de iniciativa en sus alumnos, tiene que volver a dialogar con ellos. Debe disponerse a repetir, modificándolas ligeramente, las preguntas a las que no hayan respondido los alumnos y afrontar muchas veces su silencio desconcertante (figurado aquí por puntos suspensivos).

—*¿Conocen un problema que se relacione a éste?*

—. . .

—*Consideren la incógnita. ¿Conocen algún problema que tuviese la misma incógnita?*

—. . .

—Bueno. *¿Cuál es la incógnita?*

—La diagonal de un paralelepípedo.

—¿Conocen *algún problema que tuviese la misma incógnita?*

—No. Nunca se nos ha planteado un problema acerca de la diagonal de un paralelepípedo.

—¿Conocen algún *problema que tuviese una incógnita similar?*

—. . .

—Miren, la diagonal es un segmento de recta. ¿No han resuelto ustedes algún problema cuya incógnita fuese la longitud de un segmento de recta?

—Sí, claro, ya hemos resuelto problemas de ese tipo. Por ejemplo, cuando hemos tenido que determinar el lado de un triángulo rectángulo.

—Muy bien. *He ahí un problema que se relaciona con el propuesto y que ya han resuelto. ¿Pueden utilizarlo?*

—. . .

—Han tenido suerte de acordarse de un problema análogo a éste que nos ocupa y que ya han resuelto. ¿Les gustaría utilizarlo?; *¿podrían introducir algún elemento auxiliar que les permitiese emplearlo?*

—. . .

—Veamos, el problema del que se han acordado concierne un triángulo. ¿Hay algún triángulo en vuestra figura?

Esperemos que esta última alusión sea lo suficientemente clara como para hacer nacer la idea de la solución, la cual consiste en introducir un triángulo rectángulo (rayado en la fig. 1) cuya hipotenusa es la diagonal que se busca. Sin embargo, el profesor debe prever el caso en que dicha alusión no logre sacudir el torpor de sus alumnos; tiene que estar dispuesto, entonces, a emplear toda una serie de alusiones cada vez más explícitas.

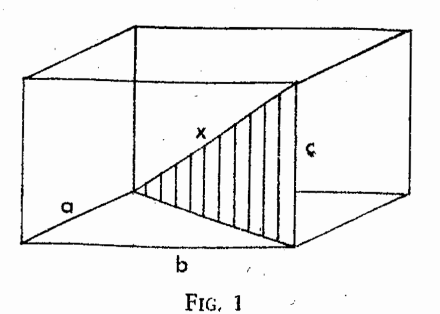


FIG. 1

—¿Quieren que aparezca un triángulo en la figura?

—¿Qué clase de triángulo quieren que aparezca?

—¿Todavía no pueden determinar la diagonal? Sin embargo, decían ustedes que sabían cómo encontrar el lado de un triángulo. Entonces, ¿qué van a hacer?

—¿Podrían encontrar la diagonal si fuese el lado de un triángulo?

Cuando finalmente, con su ayuda, los alumnos han logrado hacer aparecer el elemento auxiliar decisivo (el triángulo rectángulo rayado en la fig. 1), el maestro debe asegurarse que ven la continuación del razonamiento antes de animarlos a lanzarse en cálculos reales.

—Creo que era una buena idea el trazar ese triángulo. Ahora tienen un triángulo, pero ¿tienen ustedes la incógnita?

—La incógnita es la hipotenusa del triángulo; podemos determinarla con la ayuda del teorema de Pitágoras.

—Sí, si se conocen la longitud de los otros dos lados, pero ¿las conocen ustedes?

—Una de las longitudes es dada: c. En cuanto a la otra, no creo que sea muy difícil determinarla. ¡Claro! El otro lado es la hipotenusa de otro triángulo rectángulo.

—Perfecto. Ahora veo que tienen un plan.

11. Ejecución del plan. Poner en pie un plan, concebir la idea de la solución, ello no tiene nada de fácil. Hace falta, para lograrlo, el concurso de toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración, y lo que es más, buena suerte. Es mucho más fácil llevar al cabo el plan. Para ello lo que se requiere sobre todo es paciencia.

El plan proporciona una línea general. Nos debemos de asegurar que los detalles encajan bien en esa línea. Nos hace falta, pues, examinar los detalles uno tras otro, pacientemente, hasta que todo esté perfectamente claro, sin que quede ningún rincón oscuro donde podría disimularse un error.

Si el alumno ha concebido realmente un plan, el maestro puede disfrutar un momento de una paz relativa. El peligro estriba en que el alumno olvide su plan, lo que puede ocurrir fácilmente si lo ha recibido del exterior y lo ha aceptado por provenir de su maestro. Pero si él mismo ha trabajado en el plan, aunque un tanto ayudado, y si ha concebido la idea final con satisfacción, entonces no la perderá tan fácilmente. No obstante, el profesor debe insistir en que el alumno *verifique cada paso*.

Podemos asegurarnos de la exactitud de un paso de nuestro razonamiento ya sea "por intuición" o por medio de una "demostración formal". Podemos concentrarnos sobre el punto en cuestión hasta que lo veamos tan

claro que no nos quede duda alguna sobre la exactitud de dicho detalle. También podemos esclarecer el punto que nos interesa operando por deducción y ateniéndonos a reglas formales. (La diferencia entre "intuición" y "demostración formal" es lo suficientemente clara en muchos casos importantes; dejaremos a los filósofos el cuidado de profundizar sobre el caso.)

Lo esencial es que el alumno honestamente esté por completo seguro de la exactitud de cada paso. En ciertos casos, el profesor puede recalcar sobre la diferencia que hay entre "ver" y "demostrar": *¿Pueden ustedes ver claramente que el paso es correcto?;* pero ¿pueden también *demostrar que es correcto?*

12. Ejemplo. Tomemos nuestro trabajo en el punto en que lo habíamos dejado al final de la sección **10**. El alumno ha tenido, al fin, la idea de la solución. Ve el triángulo rectángulo cuya incógnita x es la hipotenusa y la altura dada c uno de los lados, siendo el otro lado la diagonal de una cara. Puede que el alumno deba ser llevado a establecer la notación apropiada. Deberá elegir y para representar al otro lado del triángulo, diagonal de la cara para la cual a y b son los lados. Así podrá concebir más claramente la solución que consiste en hacer aparecer un problema auxiliar cuya incógnita es y. Finalmente, considerando uno tras otro los triángulos rectángulos (ver fig. 1), podrá obtener:

$$x^2 = y^2 + c^2$$
$$y^2 = a^2 + b^2$$

y, sustituyendo la incógnita auxiliar y^2:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

El profesor no tiene por qué interrumpir al alumno si éste sale adelante con bien de estos detalles, salvo, el caso dado, para aconsejarle que *verifique cada paso del razonamiento.* El profesor puede preguntar, por ejemplo:

—*¿Ven claramente* que el triángulo cuyos lados son x, y y c es un triángulo rectángulo?

A esta pregunta el alumno puede responder "sí" con toda honestidad, pero se hallará en un aprieto si el profesor no se contenta con su convicción intuitiva y continúa el interrogatorio:

—¿Pero, pueden *demostrar* que dicho triángulo es en efecto un triángulo rectángulo?

Es, pues, preferible para el profesor el renunciar a hacer esa pregunta, a menos que su clase haya sido realmente bien iniciada en la geometría del espacio. Incluso en dicho caso se corre el riesgo de que la respuesta a una

pregunta incidental se torne, para la mayoría de los alumnos, en la dificultad principal.

13. Visión retrospectiva. Aun los buenos alumnos, una vez que han obtenido la solución y expuesto claramente el razonamiento, tienden a cerrar sus cuadernos y a dedicarse a otra cosa. Al proceder así, omiten una fase importante y muy instructiva del trabajo.

Reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas. Un buen profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado. Siempre queda algo por hacer; mediante un estudio cuidadoso y una cierta concentración, se puede mejorar cualquier solución, y en todo caso, siempre podremos mejorar nuestra comprensión de la solución.

El alumno ha llevado al cabo su plan. Ha redactado la solución, verificando cada paso del razonamiento. Tiene, pues, buenos motivos para creer que su solución es correcta. No obstante, pueden haber errores, sobre todo si el razonamiento es largo y enredado. Por lo tanto, es recomendable verificar. Especialmente si existe un medio rápido e intuitivo para asegurarse de la exactitud del resultado o del razonamiento, no debe uno dejar de hacerlo. *¿Puede verificar el resultado?; ¿puede verificar el razonamiento?*

Al igual que para convencernos de la presencia o de la calidad de un objeto, nos gusta verlo y tocarlo, prefiriendo así percibir por medio de dos sentidos diferentes al igual preferimos convencernos por medio de dos pruebas diferentes: *¿Puede obtener el resultado de un modo distinto?* Por otra parte es preferible, naturalmente, un razonamiento corto y simple a uno largo y complicado: *¿Puede verlo de golpe?*

Una de las primeras y principales obligaciones del maestro es no dar a sus alumnos la impresión de que los problemas de matemáticas no tienen ninguna relación entre sí, ni con el mundo físico. Al reconsiderar la solución de un problema se nos presenta la oportunidad de investigar sus relaciones. Los alumnos se percatarán que un tal comportamiento es realmente interesante si han hecho un esfuerzo honesto y si tienen la certidumbre de haber hecho las cosas bien. Desearán entonces ver si ese esfuerzo no podría aportarles otro beneficio y saber lo que habría que hacerse para obtener nuevamente un resultado igual de correcto. El profesor debe alentar a sus alumnos a imaginar casos en que podrían utilizar de nuevo el mismo proceso de razonamiento o aplicar el resultado obtenido. *¿Puede utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema?*

14. Ejemplo. En la sección **12** los alumnos habían obtenido finalmente la solución:

Si las tres aristas de un paralelepípedo rectangular, a partir del mismo vértice, son a, b, c, la diagonal es:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

¿Puede verificarse el resultado? El profesor no debe esperar una respuesta satisfactoria a esta pregunta de parte de alumnos inexpertos. Sin embargo, los alumnos deben saber lo más pronto posible que los problemas "literales" tienen una grande ventaja sobre los problemas puramente numéricos; si el problema está dado "en letras", su resultado puede, en efecto, someterse a varias verificaciones que serían imposibles en el caso de un problema numérico. Aunque relativamente sencillo, nuestro ejemplo permite demostrarlo. El profesor puede hacer varias preguntas acerca del resultado, a las cuales los alumnos podrán fácilmente dar una respuesta positiva; pero una respuesta negativa demostraría que hay una falla seria en el resultado.

¿Ha empleado todos los datos? ¿Figuran todos los datos a, b, c en la fórmula de la diagonal?

El largo, la altura y el ancho juegan el mismo papel en nuestra pregunta; nuestro problema es simétrico respecto de a, b y c. ¿Es que en la fórmula que han encontrado para la diagonal, a, b, y c, tienen un papel simétrico? ¿Permanece idéntica cuando se cambian entre sí a, b y c?

Nuestro problema es un problema de geometría del espacio: se trata de encontrar la diagonal de un paralelepípedo de dimensiones dadas a, b y c. Es análogo a un problema de geometría plana: encontrar la diagonal de un rectángulo de dimensiones dadas, a y b. ¿El resultado de nuestro problema en el espacio es análogo al resultado del problema de geometría plana?

Si la altura c disminuye hasta desaparecer totalmente, el paralelepípedo se convierte en un paralelograma. Si, en la fórmula, se pone $c = 0$, ¿se obtiene la fórmula correcta de la diagonal del rectángulo?

Si la altura c aumenta, la diagonal aumenta. ¿Es esto aparente en la fórmula?

Si las tres dimensiones a, b y c del paralelepípedo aumentan en la misma proporción, la diagonal aumenta también en la misma proporción. Si, en la fórmula, se sustituye a, b y c respectivamente por $12a$, $12b$ y $12c$, la expresión de la diagonal debe igualmente quedar multiplicada por 12. ¿Es ello así?

Si a, b y c se expresan en metros, la fórmula da igualmente la medida de la diagonal en metros, pero si usted expresa todas las medidas en centímetros, la fórmula debe seguir correcta. ¿Es ello así?

(Las dos últimas cuestiones son esencialmente equivalentes; véase EXAMEN DE DIMENSIONES, página 87.)

Estas cuestiones tienen varios efectos excelentes. En principio, un alumno inteligente quedará forzosamente impresionado por el hecho de que la fórmula puede experimentar tantas pruebas con éxito. Tenía ya la convicción de que la fórmula era correcta porque la había establecido con cuidado. Mas su convicción es mayor ahora y esta certeza mayor proviene de una causa diferente: se debe a una especie de "evidencia experimental". Así, gracias a las cuestiones precedentes, los detalles de la fórmula adquieren una nueva significación; se establece un lazo entre ellos y diversos hechos. Hay, pues, mayores posibilidades para que la fórmula se fije en la mente, consolidándose los conocimientos de los alumnos. También se puede fácilmente transferir dichas cuestiones y utilizarlas en problemas semejantes. Después de una cierta experiencia de problemas del mismo tipo, un alumno inteligente podrá percibir las ideas generales subyacentes: empleo de todos los datos relativos a la cuestión, variación de datos, simetría, analogía. Si toma el hábito de dedicarse al examen de estos diversos puntos, desarrollará tanto más su aptitud para solucionar problemas.

¿Puede verificarse el razonamiento? En casos difíciles e importantes puede ser necesario verificar el razonamiento paso por paso. En general, basta entresacar los puntos "delicados" para reexaminarlos. En el caso que nos ocupa, se puede aconsejar el discutir retrospectivamente la cuestión que resultaba menos interesante de examinar en tanto no se tenía la solución: ¿Pueden ustedes demostrar que el triángulo cuyos lados son x, y y c es un triángulo rectángulo? (Ver el final de la sección **12**.)

¿Puede utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema? Si se les anima un poco y se les da uno o dos ejemplos, los alumnos encontrarán fácilmente aplicaciones, las cuales consisten esencialmente en dar una *interpretación concreta* a los elementos matemáticos abstractos del problema. Es este tipo de interpretación concreta de la que se servía el profesor cuando tomaba como ejemplo, para el paralelepípedo del problema, el salón donde tenía lugar la discusión. Un alumno poco dotado podrá proponer, a título de aplicación, el calcular la diagonal de otro salón en lugar de la del salón de clase. Si los alumnos no dan muestra de mayor imaginación en sus observaciones, el profesor mismo puede plantear un problema ligeramente diferente como, por ejemplo: "Conociendo el largo, el ancho y la altura de un paralelepípedo rectangular, determinar la distancia entre el centro y uno de sus vértices."

Los alumnos pueden, entonces, utilizar *el resultado* del problema que acaban de resolver, observando que la distancia que se les pide es igual a la mitad de la diagonal que acaban de calcular. O bien, pueden emplear

el método, haciendo aparecer en la figura los triángulos rectángulos apropiados (esta última forma de proceder es menos evidente y menos elegante en el caso presente).

Después de esta aplicación, el profesor puede discutir la configuración de las cuatro diagonales del paralelepípedo y de las seis pirámides cuyas bases son las seis caras, el centro, el vértice común y las semidiagonales son las aristas laterales. Una vez que la imaginación de los alumnos se ha despertado lo suficiente, el profesor debe volver a la pregunta: *¿Pueden utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema?* Es más probable que ahora los alumnos puedan encontrar una interpretación concreta más interesante, como la que sigue, por ejemplo:

"Se quiere erigir un asta de 8 m de altura en el centro de un terreno rectangular de 21 m de largo y 16 m de ancho. Para sostener el asta se requieren cuatro cables de igual tamaño. Estos deben de partir del mismo punto, situado a 2 m del vértice del asta y llegar a los cuatro vértices del terreno. Calcular el largo de cada cable."

Los alumnos pueden utilizar el *método* del problema que han resuelto en detalle, haciendo aparecer un triángulo rectángulo en un plano vertical y otro en un plano horizontal. O bien pueden utilizar el *resultado* imaginando un paralelepípedo rectangular cuya diagonal x es uno de los cuatro cables y cuyas aristas son:

$$a = 10.5 \qquad b = 8 \qquad c = 6$$

Aplicando directamente la fórmula se obtiene $x = 14.5$. (Para otros ejemplos ver: ¿PUEDE UTILIZARSE EL RESULTADO?, página 171.)

15. Diversos planteos. Refirámonos de nuevo al problema ya considerado en las precedentes secciones **8, 10, 12** y **14.** La parte fundamental del trabajo, el encontrar el plan, ha sido descrito en la sección **10.** Observemos que el profesor podría haber procedido en forma diferente. Partiendo del mismo punto que en la sección **10,** podría haber seguido un camino ligeramente diferente planteando las siguientes preguntas:

—*¿Conocen ustedes algún problema que se relacione con el propuesto?*

—¿Conocen un problema *análogo?*

—Ustedes ven que el problema que se les plantea es un problema de geometría del espacio. ¿Podrían considerar un problema análogo, pero más simple, de geometría plana?

El problema que se les propone concierne a una figura en el espacio. Se trata de la diagonal de un paralelepípedo rectangular. ¿Cuál podría ser el problema análogo para una figura en el plano? Trataría de. . . la diagonal. . . de un rectángulo.

—El paralelogramo.

Admitiendo incluso que los alumnos son muy lentos e indiferentes y que hayan sido incapaces de adivinar nada hasta la fecha, finalmente estarán obligados a cooperar en una cierta medida por pequeña que ésta sea. Por lo demás, si el profesor tiene que tratar con alumnos tan lentos, no deberá plantear este problema del paralelepípedo sin antes haber tratado, a modo de preparación, el problema análogo concerniente al rectángulo. Puede entonces continuar como sigue:

—*He aquí un problema relacionado con el propuesto y que ustedes ya han resuelto. ¿Pueden utilizarlo?*

—*¿Deben introducir en él algún elemento auxiliar para poder emplearlo?*

El profesor logrará a veces sugerir a sus alumnos la idea deseada. Consiste en concebir la diagonal del paralelepípedo dado como la de un paralelogramo rectangular apropiado, el cual debe ser introducido en la figura (intersección del paralelepípedo con un plano que pase por las dos aristas opuestas). La idea es esencialmente la misma que la anterior (sección **10**), pero la forma de abordar el problema es diferente. En la sección **10** era por intermedio de la incógnita que se establecía el contacto con los posibles conocimientos de los alumnos; recordaban un problema que habían resuelto con anterioridad y cuya incógnita era la misma que la del problema propuesto. En la sección presente, es la analogía la que hace surgir la idea de la solución.

16. El método de interrogar del maestro. Tal como lo hemos expuesto en las secciones precedentes (**8, 10, 12, 14** y **15**) es esencialmente el siguiente: comiéncese por una pregunta general o una sugerencia de nuestra lista y, si se requiere, váyase poco a poco a las preguntas más precisas y más concretas, hasta el momento de encontrar aquella que tiene respuesta por parte de los alumnos. Si usted tiene que ayudar al alumno a explotar su idea, parta, de ser posible, de una pregunta general o de una sugerencia contenida en la lista y, váyase si es necesario, a una pregunta más especial, y así sucesivamente.

Nuestra lista, claro está, no es más que un esbozo de ese tipo; parece suficiente para la mayor parte de los casos simples, pero podría ser mejorada sin duda alguna. Interesa, sin embargo, que las sugerencias de las que se parten sean simples, naturales y generales, y que la lista sea breve.

Las sugerencias deben ser simples y naturales, ya que de otro modo serían *inoportunas.*

Deben ser generales, es decir, que deben poder aplicarse no solamente al problema considerado, sino a problemas de todo tipo, de manera a contribuir al desarrollo de *las aptitudes* del alumno y no solamente a una técnica particular.

La lista debe ser breve para que puedan repetirse las preguntas, sin que ello parezca artificial, en las circunstancias más diversas; se tendrá así una oportunidad para que finalmente sean asimiladas por el alumno y para que contribuyan al desarrollo de un *hábito mental.*

Es necesario ir poco a poco hacia preguntas cada vez más precisas, para que el alumno pueda tomar *la mayor parte* posible *en el trabajo.*

Este método de interrogación no tiene nada de rígido y es lo que determina su interés ya que, en este dominio, todo sistema mecánico, pedante, necesariamente es malo. Nuestro método comporta una cierta elasticidad, cierta variedad; admite diversos modos de abordar el problema (sección 15); puede y debe ser aplicado de tal modo que las preguntas planteadas por el profesor se le *hubiesen podido ocurrir espontáneamente al propio alumno.*

Si entre nuestros lectores hay alguno que quiera probar en su clase nuestro método, le aconsejamos que proceda con prudencia. Deberá estudiar minuciosamente el ejemplo propuesto en la sección **8** y los ejemplos que encontrará más lejos en las secciones **18, 19** y **20.** Deberá preparar cuidadosamente los ejemplos que haya elegido teniendo en cuenta las diversas maneras de abordarlos. Comenzará por algunos ensayos hasta descubrir poco a poco la forma en que conviene emplear el método, la forma en que reaccionan los alumnos, y el tiempo que se requiere.

17. Buenas y malas preguntas. Si el método expuesto más arriba se ha comprendido bien, debe permitir juzgar, por comparación, el valor de ciertas sugerencias, formuladas en general con la intención de ayudar a los alumnos.

Volvamos a tomar la situación tal como se presentaba al principio de la sección **10,** en el momento de hacer la pregunta: *¿Conocen algún problema que se relacione con el propuesto?* Se hubiera podido, con la loable intención de ayudar a los alumnos, sustituirla por la siguiente: *¿Pueden aplicar el teorema de Pitágoras?*

Por buena que sea la intención, una pregunta tal sería deplorable. Tratemos de darnos cuenta de las condiciones en las cuales dicha pregunta se puede plantear; veremos entonces que existe una larga serie de objeciones que oponer a dicho tipo de "ayuda". En efecto:

1) Si el alumno está cerca de encontrar la solución, puede comprender la sugerencia que implica la pregunta; pero en el caso contrario, es muy probable que no vea en lo absoluto cuál puede ser el fin de una pregunta tal. Así, éste no aportará ninguna ayuda donde más falta hacía.

2) Si el alumno comprende la sugerencia, le libra el secreto entero sin dejarle gran cosa por hacer.

3) La pregunta es de una naturaleza demasiado especial. Incluso si el alumno puede utilizarla para resolver el problema considerado, no le dejará nada para ulteriores problemas. La pregunta nada tiene de instructiva.

4) Incluso si el alumno comprende la sugerencia, difícilmente puede comprender porqué el profesor ha tenido la idea de hacerla. ¿Y cómo él, el alumno, podría encontrar por sí mismo una pregunta tal? Llega en forma sorpresiva y poco natural, como el conejo que el prestidigitador saca del sombrero; no es instructiva en lo absoluto.

Ninguna de estas objeciones se puede oponer al método descrito en la sección **10** o en la sección **15.**

OTROS EJEMPLOS

18. Problema de construcción. *Inscribir un cuadrado en un triángulo dado tal que dos vértices del cuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices del cuadrado sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo respectivamente.*

—*¿Cuál es la incógnita?*

—Un cuadrado.

—*¿Cuáles son los datos?*

—Un triángulo dado, nada más.

—*¿Cuál es la condición del problema?*

—Los cuatro vértices del cuadrado deben hallarse sobre el perímetro del triángulo, dos sobre la base y los otros dos sobre cada uno de los otros dos lados respectivamente.

—*¿Es posible satisfacer la condición?*

—Creo que sí, pero no estoy seguro.

—No parece que el problema le resulte muy fácil. *Si no puede resolverlo, trate primero de resolver algún problema relacionado* ¿Puede usted satisfacer *alguna parte de la condición?*

—¿Qué quiere decir por una parte de la condición?

—Veamos; la condición concierne a todos los vértices del cuadrado. ¿De cuántos vértices se trata?

—De cuatro.

—Una parte de la condición se aplicaría a menos de cuatro vértices. *Tome sólo una parte de la condición, deje la otra parte.* ¿Qué parte de la condición es fácil de satisfacer?

—Es fácil trazar un cuadrado con dos de sus vértices sobre el perímetro del triángulo, incluso un cuadrado con tres de sus vértices sobre el perímetro del triángulo.

—*Dibuje una figura.*

El alumno dibuja la figura 2.

—Usted no ha *considerado más que una parte de la condición, abandonando la otra. ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada?*

—El cuadrado no está determinado si sólo tiene tres de sus vértices sobre el perímetro del triángulo.

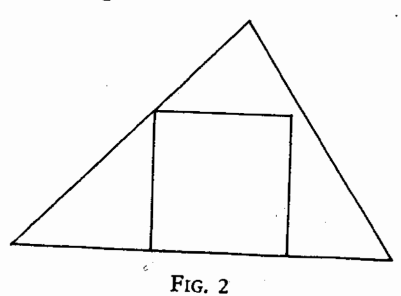


FIG. 2

—Bien. *Dibuje otra figura.*

El alumno dibuja la figura 3.

—Tal como dice, el cuadrado no queda determinado por la *parte de la condición considerada. ¿Cómo puede variar?*

—. . .

—Tres de los vértices de su cuadrado están en el perímetro del triángulo, pero el cuarto no está donde debería estar. Como usted lo ha dicho, el cuadrado no está determinado, puede variar; resulta lo mismo para su cuarto vértice. *¿Cómo puede variar?*

—. . .

—Trátelo experimentalmente si lo desea. Trace otros cuadrados, tres de cuyos vértices se hallen sobre el perímetro del mismo modo que los dos

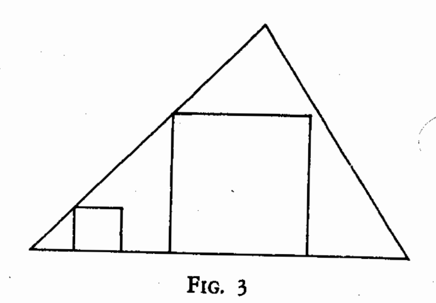


FIG. 3

cuadrados ya dibujados en la figura. Dibújelos pequeños y grandes. ¿Cuál le parece ser el lugar geométrico del cuarto vértice? *¿Cómo puede variar?* El profesor ha llevado al alumno muy cerca de la idea de la solución.

Si el alumno es capaz de adivinar que el lugar geométrico del cuarto vértice es una recta, habrá resuelto el problema.

19. Problema de demostración. *Dos ángulos están situados en dos planos diferentes, pero cada uno de los lados de uno es paralelo al lado correspondiente del otro, y en la misma dirección. Demostrar que los dos ángulos son iguales.*

Se trata de uno de los teoremas fundamentales de la geometría del espacio. El problema se puede proponer a alumnos que, teniendo una cierta experiencia de la geometría plana, conocen los rudimentos de la geometría del espacio que preparan el presente teorema en los Elementos de Euclides. (El teorema que acabamos de enunciar y que vamos a demostrar, es en efecto la proposición 10 del libro XI de Euclides.) Se han impreso en cursiva no solamente las preguntas y sugerencias que provienen de nuestra lista, sino también otras diversas que les corresponden, como los "problemas por demostrar" corresponden a los "problemas por resolver". (Hemos establecido esta correspondencia en una forma sistemática en PROBLEMAS POR RESOLVER, PROBLEMAS POR DEMOSTRAR, 5, 6; página 162.)

—*¿Cuál es la hipótesis?*

—Dos ángulos están situados en diferentes planos. Cada uno de los lados de uno es paralelo al lado correspondiente del otro y en la misma dirección.

—*¿Cuál es la conclusión?*

—Los ángulos son iguales.

—*Dibuje una figura. Introduzca una notación apropiada.*

El alumno traza las líneas de la figura 4 y, más o menos ayudado por el profesor, elige las letras de la figura.

—*¿Cuál es la hipótesis?* Le ruego que la formule empleando su notación.

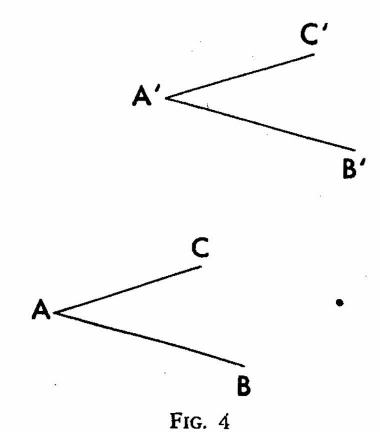


FIG. 4

—A, B, C no están en el mismo plano que A', B', C'. Se tiene $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$. Además, AB tiene la misma dirección que $A'B'$, y AC la misma dirección que $A'C'$.

—*¿Cuál es la conclusión?*

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$$

—*Observe bien la conclusión y trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o una conclusión similar.*

—Si dos triángulos son iguales, sus ángulos correspondientes son iguales.

—Muy bien. *He aquí, pues, un teorema relacionado con el propuesto y que ha sido demostrado ya. ¿Puede usted emplearlo?*

—Creo que sí, pero no veo bien cómo.

—*¿Le haría falta introducir un elemento auxiliar para poder utilizarlo?*

—. . .

—Veamos. El teorema que usted ha enunciado tan bien se refiere a triángulos, una pareja de triángulos iguales. ¿En la figura dispone de triángulos?

—No, pero puedo hacer que figuren. Uniendo B y C, B' y C'. Se tienen entonces dos triángulos. ΔABC y $\Delta A'B'C'$.

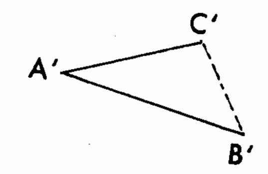
—Perfecto, pero, ¿de qué servirán esos triángulos?

—Para demostrar la conclusión, es decir, que $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$.

—Bien. Si es eso lo que quiere usted demostrar, ¿qué tipo de triángulos necesita?

—Triángulos iguales. Sí, claro está, yo puedo elegir B, C, B', C' tal que

$$AB = A'B', \text{ y } AC = A'C'$$



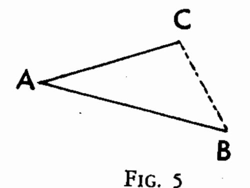


FIG. 5

—Muy bien. Y ahora, ¿qué quiere demostrar?

—Quiero demostrar que los triángulos son iguales:

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

Si lo puedo demostrar, la conclusión $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ sigue inmediatamente.

—Muy bien. Ahora se propone un nuevo fin, busca una nueva conclusión. *Observe bien la conclusión y trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o una conclusión similar.*

—Dos triángulos son semejantes si los tres lados de uno son respectivamente iguales a los tres lados del otro.

—Bien. No podía elegir mejor. Así pues, *he aquí de nuevo un teorema que se relaciona al propuesto y que ya ha demostrado. ¿Puede usted utilizarlo?*

—Sí, si supiese que $BC = B'C'$.

—Exacto. ¿Cuál es pues su propósito?

—Demostrar que $BC = B'C'$.

—*Trate de recordar algún teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o una conclusión similar.*

—Conozco un teorema que termina diciendo: ". . . entonces los dos segmentos son iguales", pero no conviene en este caso.

—*¿Le haría falta introducir algún elemento auxiliar para poder emplearlo?*

—. . .

—Veamos, ¿cómo podría usted demostrar que $BC = B'C'$ dado el caso que no existe relación en la figura entre BC y $B'C'$?

—. . .

—*¿Ha empleado usted la hipótesis? ¿Cuál es la hipótesis?*

—Suponemos que $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$. Sí, claro está; debo emplearla.

—*¿Ha empleado toda la hipótesis?* Dice usted que $AB \| A'B'$. ¿Es todo lo que sabe acerca de estas líneas?

—No. AB también es igual a $A'B'$ por construcción. Esos segmentos son paralelos e iguales entre sí. Al igual que AC y $A'C'$.

—Dos segmentos paralelos y de igual tamaño; una interesante configuración. *¿Se le ha presentado antes?*

—Sí, claro está: el paralelogramo. Uniendo A con A', B con B' y C con C'.

—La idea no es mala. *¿Cuántos paralelogramos tiene usted ahora en la figura?*

—Dos. No, tres. No, dos. Quiero decir que hay dos que se pueden

demostrar inmediatamente que son paralelogramos. Hay un tercero que parece serlo. Espero poder demostrar que, en efecto, lo es y así la demostración quedará concluida.

De las respuestas precedentes podíamos suponer que el alumno era inteligente; pero, después de esta última observación no hay duda de ello. Este alumno ha sido capaz de adivinar un resultado matemático y de establecer una distinción nítida entre el hecho de adivinar y el de demostrar. Ha comprendido también que lo que se adivina puede ser más o menos plausible. Ha sacado realmente un cierto provecho de sus cursos de matemáticas; tiene una cierta experiencia práctica de la manera como conviene resolver problemas; puede concebir y explotar a fondo una buena idea.

20. Problema de rapidez de variación. *Se vierte agua en un recipiente de forma cónica con una rapidez* r. *El recipiente en forma de cono de base horizontal tiene el vértice dirigido hacia abajo; el radio de la base del cono es* a, *su altura* b. *Determinar la velocidad a la que la superficie del agua se eleva cuando la profundidad del agua es* y. *Después, obtener el valor numérico de la incógnita, suponiendo que* a = 4 *dm,* b = 3 *dm,* r = 2 *dm*³ *por minuto y* y = 1 *dm.*

Se supone que los alumnos conocen las reglas más elementales de diferenciación y la noción de "rapidez de variación".

—*¿Cuáles son los datos?*

—El radio de la base del cono, $a = 4$ dm; la altura del cono, $b = 3$ dm; la rapidez con que el agua se vierte en el recipiente $r = 2$ dm³ por minuto, y la profundidad del agua en un cierto momento, $y = 1$ dm.

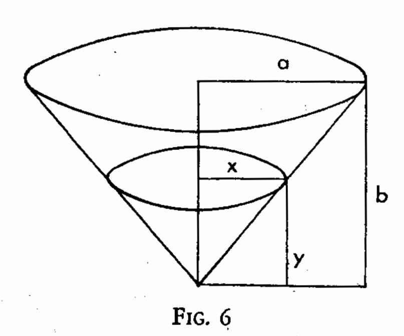


FIG. 6

—Exacto. El enunciado del problema parece sugerir que se deben dejar de lado, provisionalmente, los valores numéricos y razonar con las letras, expresando la incógnita en función de *a, b, r* y *y,* y al final solamente, tras de obtener la expresión algebraica de la incógnita, sustituir los valores numéricos. Adoptemos esta sugerencia. *¿Cuál es la incógnita?*

—La velocidad a la que se eleva la superficie del agua cuando la profundidad es *y*.

—Es decir, *¿puede usted expresarlo en otros términos?*

—La velocidad con que aumenta la profundidad del agua.

—Nuevamente, *¿puede usted enunciar el problema en forma diferente?*

—La rapidez de variación de la profundidad del agua.

—Exacto: la rapidez de variación de *y*. Pero, ¿qué es la rapidez de variación? *Considere usted la definición.*

—La derivada de una función representa la rapidez de variación.

—Correcto. Ahora bien, ¿*y* es una función? Como ya lo hemos dicho, no nos ocuparemos de su valor numérico. ¿Puede imaginar que *y* varía?

—Sí, *y*, la profundidad del agua, aumenta a medida que pasa el tiempo.

—Por lo tanto, ¿*y* es función de qué?

—Del tiempo *t*.

—Bien. *Introduzca una notación apropiada.* ¿Cómo expresaría usted la "rapidez de variación de *y*" por medio de símbolos matemáticos?

— $\frac{dy}{dt}$.

—Bien. He ahí, pues, su incógnita. Le hace falta expresarla en términos de *a, b, r* y *y*. De hecho, uno de estos datos es una rapidez de variación: ¿cuál de ellos?

—*r*, que representa la cantidad de agua que cae en el recipiente durante un tiempo dado.

—¿Puede decirlo en otra forma?

—*r* es la rapidez de variación del volumen de agua en el recipiente.

—Es decir, *¿puede enunciarlo nuevamente en forma diferente?;* ¿cómo podría escribirlo con una *notación apropiada?*

— $r = \frac{dV}{dt}$

—¿Qué es *V*?

—El volumen de agua que hay en el recipiente en el instante *t*.

—Bien. Así pues, tiene que expresar $\frac{dy}{dt}$ en términos de a, b, $\frac{dV}{dt}$, y. ¿Cómo va usted a tratar de hacerlo?

—. . .

—*Si no puede resolver el problema, trate de resolver, primero, un problema relacionado.* Si no ve la relación entre $\frac{dy}{dt}$ y los datos, trate de que aparezca alguna relación más sencilla que podría servirle de punto de partida.

—. . .

—¿No ve usted que existen otras relaciones? Por ejemplo, ¿y y V son independientes una de otra?

—No. Cuando y aumenta, V debe aumentar también.

—Así hay una relación. ¿Cuál es, pues?

—Pues que V es el volumen del cono cuya altura es y. Pero desconozco el radio de la base.

—Sin embargo, puede tenerlo en cuenta. Déle un nombre cualquiera, x por ejemplo.

— $$V = \frac{\pi x^2 y}{3}$$

—Exacto. Ahora, ¿qué sabe usted de x? ¿Es independiente de y?

—No. Cuando la profundidad del agua, y, aumenta, el radio de la superficie variable x aumenta también.

—Así pues, hay una relación. ¿Cuál es ésta?

—Sí, claro, hay triángulos semejantes:

$$x:y = a:b$$

—Una relación más, ¿ve usted? No hay que desaprovecharla. No olvide que usted quería conocer la relación existente entre V y y.

—Se tiene

$$x = \frac{ay}{b}$$

$$V = \frac{\pi a^2 y^2}{3b^2}$$

—Muy bien. Esto me parece un buen punto de partida. ¿Qué le parece a usted? Pero no olvide su propósito. *¿Cuál es la incógnita?*

— $$\frac{dy}{dt}$$

—Tiene que encontrar una relación entre $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ y otras cantidades.

—Aquí tiene una entre y, V y otras cantidades. ¿Qué hacer?

—Pues claro, diferenciando se tiene

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{b^2} \cdot \frac{dy}{dt}$$

He ahí la solución.

—Perfecto. Y, ¿para los valores numéricos?

—Si $a = 4$, $b = 3$, $\frac{dV}{dt} = r = 2$, $y = 1$, entonces

$$2 = \frac{\pi \times 16 \times 1}{9} \frac{dy}{dt}.$$

Segunda parte

Cómo resolver un problema: Un diálogo

Familiarizarse con el problema

¿Por dónde debo empezar? Empiece por el enunciado del problema.

¿Qué puedo hacer? Trate de visualizar el problema como un todo, tan claramente como pueda. No se ocupe de los detalles por el momento.

¿Qué gano haciendo esto? Comprenderá el problema, se familiarizará con él, grabando su propósito en su mente. La atención dedicada al problema puede también estimular su memoria y prepararla para recoger los puntos importantes.

Trabajar para una mejor comprensión

¿Por dónde debo empezar? Empiece de nuevo por el enunciado del problema. Empiece cuando dicho enunciado resulte tan claro y lo tenga tan bien grabado en su mente que pueda usted perderlo de vista por un momento sin temor de perderlo por completo.

¿Qué puedo hacer? Aislar las principales partes del problema. La hipótesis y la conclusión son las principales partes de un "problema por demostrar"; la incógnita, los datos y las condiciones son las principales partes de un "problema por resolver". Ocúpese de las partes principales del problema, considérelas una por una, reconsidérelas, considérelas después *combinándolas entre sí, estableciendo las relaciones que puedan existir entre* cada detalle y los otros y entre cada detalle y el conjunto del problema.

¿Qué gano haciendo esto? Está usted preparando y aclarando detalles que probablemente entrarán en juego más tarde.

En busca de una idea útil

¿Por dónde debo empezar? Empiece por considerar las partes principales del problema. Empiece cuando dichas partes estén, por usted, claramente dispuestas y concebidas, gracias a su trabajo previo, y cuando considere que su memoria "responde".

¿Qué puedo hacer? Considere el problema desde varios puntos de vista y busque puntos de contacto con sus conocimientos previamente adquiridos.

Considere el problema desde varios puntos de vista. Subraye las dife-

rentes partes, examine los diferentes detalles, examine los mismos detalles repetidamente, pero de modo diferente, combine entre sí los detalles de diversos modos, abórdelos por diferentes lados. Trate de ver algún nuevo significado en cada detalle, alguna nueva interpretación del conjunto.

Busque puntos de contacto con sus conocimientos previamente adquiridos. Trate de acordarse de lo que le ayudó en el pasado ante circunstancias análogas. Trate de reconocer algo familiar en lo que examina y de encontrar algo útil en lo que reconoce.

¿Qué puedo encontrar? Una idea que le sea útil, quizá una idea decisiva que le muestre de golpe cómo llegar a la solución misma del problema.

¿Cómo puede ser útil una idea? Haciéndole ver el conjunto del razonamiento o una parte de él. Le sugiere más o menos claramente cómo puede proceder. Las ideas son más o menos terminantes. Es ya una suerte tener una idea sea cual fuere ésta.

¿Qué puedo hacer con una idea incompleta? La debe considerar. Si parece ventajosa, la debe considerar más a fondo. Si parece digna de confianza, usted debe averiguar hasta dónde le puede llevar y debe reconsiderar la situación. La situación ha cambiado gracias a su idea útil. Considere la nueva situación desde varios puntos de vista y busque puntos de contacto con sus conocimientos adquiridos anteriormente.

¿Qué gano haciendo esto nuevamente? Puede usted tener la suerte de encontrar alguna otra idea. Quizá su nueva idea lo conduzca directamente al camino de la solución. Quizá requiera usted alguna idea más. Quizá, incluso, alguna de estas ideas le desvía a usted del camino correcto. No obstante, usted debe de alegrarse por toda nueva idea que surja, también por las de poca importancia o confusas, y también por las ideas suplementarias que añadan alguna precisión a una idea confusa o permitan la corrección de una idea menos afortunada. Incluso si, por un cierto tiempo, no se le presenta una nueva idea verdaderamente buena; considérese afortunado si su concepción del problema se torna más completa o más coherente, más homogénea o mejor equilibrada.

Ejecución del plan

¿Por dónde debo empezar? Empiece por la feliz idea que le conduce a la solución. Empiece cuando esté seguro de tener el correcto punto de partida y esté seguro de poder suplir los detalles menores que pueden necesitarse.

¿Qué puedo hacer? Asegúrese de que tiene la plena comprensión del problema. Efectúe en detalle todas las operaciones algebraicas o geométricas que previamente ha reconocido como factibles. Adquiera la convicción de la exactitud de cada paso mediante un razonamiento formal o por discernimiento intuitivo o por ambos medios, si es posible. Si su problema es muy complejo, usted puede distinguir "grandes" pasos y "pequeños" pasos, estando compuesto cada gran paso de varios pequeños. Compruebe primero los grandes pasos y después considere los menores.

¿Qué gano haciendo esto? Una presentación de la solución para la cual la exactitud y corrección de cada paso no ofrece duda alguna.

Visión retrospectiva

¿Por dónde debo empezar? Por la solución, completa y correcta en todos sus detalles.

¿Qué puedo hacer? Considerar la solución desde varios puntos de vista y buscar los puntos de contacto con sus conocimientos previamente adquiridos.

Considere los detalles de la solución y trate de hacerlos tan sencillos como pueda; reconsidérelos más extensamente y trate de condensarlos; trate de abarcar de un vistazo la solución completa. Trate de modificar, en beneficio de ellas, tanto las partes principales como las secundarias; trate de mejorar la solución en su conjunto de tal modo que se adivine por sí misma y que quede grabada, en forma natural, en el cuadro de sus conocimientos previos. Examine atentamente el método que le ha llevado a la solución, trate de captar su razón de ser y trate de aplicarlo a otros problemas. Examine atentamente el resultado y trate igualmente de aplicarlo a otros problemas.

¿Qué gano haciendo esto? Puede encontrar una solución mejor y diferente, descubrir nuevos hechos interesantes. En todo caso, si toma el hábito de reconsiderar las soluciones y examinarlas muy atentamente, adquiere usted una serie de conocimientos correctamente ordenados, utilizables en cualquier momento, a la vez que desarrolla su aptitud en la resolución de problemas.

Tercera parte

Breve diccionario de heurística

Afición a los problemas

El aficionado a resolver problemas se plantea con frecuencia a sí mismo preguntas similares a las que ofrece nuestra relación de temas. Quizá descubre por sí mismo preguntas de ese tipo o, habiendo oído hablar de ellas, halla directamente el uso que conviene hacer de dichas preguntas. Puede darse el caso que no esté consciente en lo absoluto de que está repitiendo siempre la misma pregunta. O bien esa pregunta es su preferida: sabe que forma parte de la actitud mental adecuada durante tal o cual fase del trabajo y tiene la costumbre de provocar la actitud correcta planteando la pregunta correcta.

Este aficionado a resolver problemas puede encontrar las preguntas y sugerencias de nuestra lista de gran utilidad. Le pueden permitir comprender perfectamente las explicaciones y los ejemplos que las ilustran, pueden permitirle sospechar el uso correcto de ellas; pero no logrará una completa comprensión a menos de encontrar en su propio trabajo el proceso que la pregunta trata de provocar. Debe experimentar su utilidad descubriendo en lo que le puede ser útil personalmente.

El aficionado a resolver problemas debe estar preparado a plantearse todas las preguntas de la lista, pero no debe plantearse ninguna si no le conduce a ello un atento examen del problema que se estudia, y si no estima que debía planteársela. De hecho debe reconocer él mismo si la presente situación es parecida a alguna otra en la que ha podido aplicar la misma pregunta con éxito.

Tratará pues, ante todo, de comprender el problema de un modo tan completo y claro como sea posible. Pero esto no basta. Debe concentrarse en el problema y desear ansiosamente su solución. Si no puede hacer nacer el deseo real de resolverlo, más vale abandonarlo. El secreto del éxito real radica en entregarse al problema en cuerpo y alma.

Analogía

La analogía es una especie de similitud. Objetos semejantes concuerdan unos con otros en algunos aspectos mientras que objetos análogos *concuerdan en ciertas relaciones* entre sus respectivos elementos.

1. Un paralelogramo rectangular es análogo a un paralelepípedo rectangular. De hecho, las relaciones entre los lados del paralelogramo son semejantes a las que existen entre las caras del paralelepípedo.

Cada lado del paralelogramo es paralelo a uno solo de los otros lados y perpendicular a los lados restantes.

Cada cara del paralelepípedo es paralela a una sola de las otras caras y perpendicular a las caras restantes.

Consideremos como "elemento límite" el lado del paralelogramo y como "elemento límite" la cara del paralelepípedo. Podemos entonces reducir las dos consideraciones anteriores a una sola que se aplique a ambas figuras.

Cada elemento límite es paralelo a uno solo y perpendicular a los restantes elementos límites.

Así pues, hemos expresado ciertas relaciones comunes a los dos sistemas de objetos que hemos comparado, a saber, los lados del rectángulo y las caras del paralelepípedo rectangular. La analogía de dichos sistemas consiste en la comunidad de relaciones.

2. La analogía ocupa todo nuestro modo de pensar, tanto nuestras cotidianas conversaciones y nuestras más banales conclusiones como los medios de expresión artística y las más altas realizaciones científicas. Así, pues, se emplea en los más diferentes niveles.

Con frecuencia el vulgo emplea analogías vagas, ambiguas, incompletas o no del todo claras, pero la analogía puede alcanzar el nivel de la precisión matemática. Todo género de analogía puede jugar un papel en el descubrimiento de la solución, por ello no debemos descuidar ninguno.

3. Debemos considerarnos felices cuando, tratando de resolver un problema, logramos descubrir un *problema análogo más sencillo*. En la sección 15, nuestro problema primitivo concernía a la diagonal de un paralelepípedo rectangular; el estudio de un problema análogo más sencillo que trataba de la diagonal de un rectángulo nos llevó a la solución del problema primitivo. Vamos a examinar otro caso del mismo género. Tenemos que resolver el siguiente problema.

Encontrar el centro de gravedad de un tetraedro homogéneo.

Si no se tiene ninguna noción del cálculo integral y pocos conocimientos de física, el problema no es nada fácil; era un problema científico muy serio en tiempos de Arquímedes o de Galileo. Así pues, si deseamos resolverlo utilizando un mínimo de conocimientos previos, nos hace falta buscar un problema análogo más sencillo. El correspondiente problema de geometría plana se presenta por sí mismo.

Encontrar el centro de gravedad de un triángulo homogéneo.

Ahora debemos responder a dos preguntas en lugar de una. Pero ello

puede resultar más fácil —a condición de establecer entre las dos una relación adecuada.

4. Descartemos, por el momento, el problema primitivo del tetraedro y concretémonos al problema análogo, más sencillo, concerniente al triángulo. Para resolverlo debemos tener algunas nociones sobre los centros de gravedad. El siguiente principio es plausible y se presenta naturalmente por sí mismo.

Si un sistema de masas S consta de elementos cuyos centros de gravedad se hallan todos sobre un mismo plano, el plano contiene igualmente el centro de gravedad del conjunto del sistema S.

Este principio nos proporciona todo lo que necesitamos en el caso del triángulo. En primer lugar, implica que el centro de gravedad del triángulo está situado en el plano del mismo. Podemos entonces considerar al triángulo como compuesto de fibras (bandas muy delgadas, paralelogramos "infinitamente estrechos") paralelos a uno de los lados del triángulo (el lado AB en la fig. 7). El centro de gravedad de cada fibra (o de cada paralelogramo) es, desde luego, su punto medio, y todos estos centros están situados sobre la línea que une el vértice C al punto medio M de AB (ver fig. 7).

Todo plano que pase por la mediana CM del triángulo contiene todos los centros de gravedad de las fibras paralelas que constituyen el triángulo.

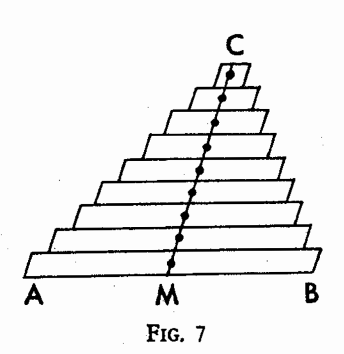


FIG. 7

Así pues, llegamos a la conclusión de que el centro de gravedad del triángulo completo está situado sobre esta misma mediana. Ahora bien, como del mismo modo puede estar situado sobre las otras dos medianas, el centro de gravedad será, forzosamente, *el punto de intersección común a las tres medianas.*

Es conveniente verificar entonces, por geometría pura, independientemente de toda hipótesis mecánica, que las tres medianas son, en efecto, concurrentes.

5. Después del caso del triángulo, el del tetraedro es relativamente fácil. Ya hemos resuelto ahora un problema análogo al que se nos había propuesto y, por consiguiente, tenemos un *modelo a seguir*.

Al resolver el problema análogo que nos sirve ahora de modelo, hemos supuesto el triángulo *ABC* compuesto de fibras paralelas a uno de sus lados *AB*. Ahora vamos a suponer que el tetraedro *ABCD* se compone de fibras paralelas a su arista *AB*.

Los puntos medios de las fibras que constituyen el triángulo están situados sobre la mediana que une el punto medio *M* del lado *AB* con el vértice opuesto *C*. Los puntos medios de las fibras que constituyen el tetraedro están situados sobre el plano que une el punto medio *M* de la arista *AB* con la arista opuesta *CD* (ver fig. 8); podemos llamar a dicho plano *MCD*, *plano mediano* del tetraedro.

En el caso del triángulo, teníamos tres medianas, cada una de las cuales debía contener al centro de gravedad del triángulo. Esas tres medianas debían, pues, concurrir en un punto que era precisamente el centro de gravedad.

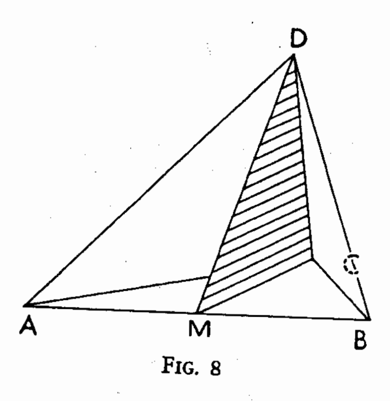


FIG. 8

En el caso del tetraedro, tenemos seis planos medianos, tales como *MCD*, uniendo el punto medio de cada arista a la arista opuesta, cada uno de los cuales contiene al centro de gravedad del tetraedro. Por lo tanto, esos seis planos deben concurrir en un punto que es precisamente el centro de gravedad buscado.

6. Hemos, pues, resuelto el problema del centro de gravedad del tetraedro homogéneo. Para completar nuestra solución, es conveniente verificar, por medio de la geometría pura e independientemente de toda consideración mecánica, el hecho de que los seis planos medianos son, en efecto, concurrentes.

Al resolver el problema del centro de gravedad del triángulo homogéneo, habíamos ya indicado que convenía, a fin de completar nuestra solución, verificar que las tres medianas eran, en efecto, concurrentes. Este problema era análogo al del tetraedro, pero visiblemente más sencillo.

Podemos nuevamente utilizar, para resolver el problema relativo al tetraedro, el problema análogo concerniente al triángulo (que podemos suponer aquí como resuelto). En efecto, considérense los tres planos medianos que pasan por las tres aristas *DA*, *DB*, *CD*, partiendo del vértice *D*; cada uno de ellos pasa igualmente por el punto medio de la arista opuesta (el plano mediano que pasa por *DC* pasa igualmente por *M*; véase fig. 8). Ahora bien, esos tres planos medianos intersectan al plano del triángulo *ABC* sobre las tres medianas de dicho triángulo. Estas tres medianas pasan por el mismo punto (este es el resultado del problema análogo más sencillo) y dicho punto, como el punto *D*, es común a los tres planos medianos. La recta que une los dos puntos comunes es común a los tres planos medianos.

Hemos demostrado que 3 de los 6 planos medianos que pasan por el vértice *D* tienen una recta común. Lo mismo debe ser cierto para los 3 planos medianos que pasan por *A* como para los 3 planos medianos que pasan por *B* y para los 3 que pasan por *C*. Estableciendo entre estos diversos hechos una relación adecuada, podemos demostrar que los 6 puntos medianos tienen un punto común. (Los 3 planos medianos que pasan por los lados del triángulo *ABC* determinan un punto común y 3 líneas de intersección que se cortan en dicho punto. Ahora bien, según lo que acabamos de demostrar, por cada línea de intersección debe pasar otro plano mediano.)

7. En los párrafos 5 y 6 nos hemos valido de un problema análogo más sencillo, concerniente al triángulo, para resolver un problema acerca del tetraedro. No obstante, los dos casos difieren en un punto importante. En el párrafo 5 hemos empleado *el método* de un problema análogo más sencillo, del cual hemos copiado la solución punto por punto. En el párrafo 6 hemos empleado *el resultado* del problema análogo más sencillo, sin preocuparnos del modo como se había obtenido dicho resultado. A veces se puede utilizar a *la vez el método y el resultado* del problema análogo más sencillo. Nuestro precedente ejemplo es una prueba de ello, pero a condición de considerar los párrafos 5 y 6 como elementos diferentes de la solución de un mismo problema.

Nuestro ejemplo es típico. Para resolver un problema que se nos plantea, podemos con frecuencia utilizar la solución de un problema análogo más sencillo, ya sea utilizando su método o su resultado o ambos a la vez. Naturalmente, en ciertos casos difíciles, se pueden presentar complicaciones que no han sido mostradas en nuestro ejemplo. En particular la solución del problema análogo no siempre puede emplearse de inmediato para re-

solver el problema primitivo. Conviene, entonces, reconsiderar la solución, transformarla y modificarla, buscar otras formas de la misma, hasta que se encuentre una que pueda ser extensiva al problema original.

8. Es conveniente, prever el resultado o al menos algunas de sus características, que sean más o menos plausibles. Este tipo de previsiones se basan con frecuencia en la analogía.

Así, podemos saber que el centro de gravedad de un triángulo homogéneo coincide con el de sus tres vértices (es decir, de los tres puntos materiales de igual masa colocados en los vértices del triángulo). Sabiendo esto, podemos conjeturar que el centro de gravedad del tetraedro homogéneo coincide con el de sus cuatro vértices.

Esta hipótesis es una "inferencia por analogía". Sabiendo que el triángulo y el tetraedro son parecidos en muchos aspectos, podemos conjeturar que se parecen en un aspecto más. Sería absurdo confundir la plausibilidad con la certidumbre de tales conjeturas, pero no prestarles atención sería igualmente absurdo o incluso más.

La inferencia por analogía parece ser el tipo de conclusión más común y sin duda alguna el más útil. Proporciona hipótesis más o menos plausibles, que la experiencia o un estricto razonamiento podrán quizá confirmar. El químico que experimenta sobre animales los remedios destinados a los humanos deduce sus conclusiones por analogía. Pero era también lo que hacía un niño conocido mío. Cuando llevaban al veterinario a su perro favorito, el niño preguntó:

—*¿Qué es un veterinario?*

—El médico de los animales.

—*¿Qué clase de animal es el médico de los animales?*

9. La conclusión por analogía sacada de un gran número de casos paralelos es más sólida que la conclusión deducida de casos menos numerosos. Sin embargo, la calidad es aquí también más importante que la cantidad. Analogías precisas tienen más peso que vagas similitudes, ejemplos sistemáticamente clasificados cuentan más que una fortuita colección de casos.

En el precedente párrafo 8, hemos adelantado una hipótesis sobre el centro de gravedad del tetraedro. Dicha hipótesis se apoyaba en la analogía: el caso del tetraedro es análogo al del triángulo. Podemos reforzarla mediante el examen de otro caso análogo, el de una varilla homogénea (es decir, un segmento de recta de densidad uniforme).

La analogía entre:

segmento triángulo tetraedro

tiene numerosos aspectos. Un segmento está comprendido en una recta, un triángulo en un plano, un tetraedro en el espacio. El segmento de recta es la figura más simple de una dimensión, el triángulo es el polígono más simple, el tetraedro es el poliedro más simple.

El segmento tiene dos elementos límites de dimensión cero (sus dos extremos) y su interior es de una dimensión.

El triángulo tiene tres elementos límites de dimensión cero (3 vértices), 3 elementos límite de una dimensión (3 lados) y su interior es de dos dimensiones.

El tetraedro tiene 4 elementos límite de dimensión cero (4 vértices), 6 de una dimensión (6 aristas), 4 de dos dimensiones (4 caras), y su interior es de tres dimensiones.

Dichos números se pueden agrupar en una tabla. Los números en columna representan los elementos de dimensión cero, de una, de dos y de tres dimensiones; los números en renglones corresponden, respectivamente, al segmento, al triángulo y al tetraedro:

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1

Por poco que estemos familiarizados con las potencias del binomio, nos será fácil reconocer en estos números una sección del triángulo de Pascal. Encontramos una notable regularidad en el segmento, el triángulo y el tetraedro.

10. Si la experiencia nos muestra que los objetos que hemos comparado están estrechamente relacionados entre sí, "inferencias por analogía", como la que sigue, pueden parecernos tener un valor incontestable.

El centro de gravedad de un segmento de recta homogéneo coincide con el de sus dos puntos extremos. El centro de gravedad de un triángulo homogéneo coincide con el de sus tres vértices. ¿Por qué no sospecharíamos que el centro de gravedad de un tetraedro homogéneo coincide con el de sus cuatro vértices?

Por otra parte, el centro de gravedad de un segmento de recta homogéneo divide la distancia entre sus dos puntos extremos según la razón 1:1. El centro de gravedad de un triángulo divide la distancia entre uno de sus vértices y el punto medio del lado opuesto según la razón 2:1. ¿Cómo no sospechar que el centro de gravedad de un tetraedro homogéneo no divida a la distancia entre uno de sus vértices y el centro de gravedad de la cara opuesta según la razón 3:1?

Parece inverosímil que las hipótesis sugeridas por estas cuestiones sean falsas, que una tan bella regularidad se destruya. El sentimiento de que un orden armonioso y simple no podría ser engañoso guía al investigador tanto en matemáticas, como en las demás ciencias y encuentra su expresión

en el adagio latino: *simplex sigillum veri* (la sencillez es el sello de la verdad).

[Esta última constatación nos sugiere extender nuestro razonamiento a η dimensiones. Parece poco probable que lo que es cierto para las tres primeras dimensiones, para $\eta = 1, 2, 3$, deje de serlo para valores mayores de η. Esta hipótesis es una "inferencia por inducción", ilustra el hecho de que la inducción está naturalmente basada en la analogía. (Ver INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, página 114.)

[11. Terminaremos la presente sección considerando brevemente el caso más importante en el cual la analogía alcanza la precisión de la idea matemática.

I) Dos sistemas de elementos matemáticos S y S' tienen entre sí una dependencia tal que ciertas relaciones entre los elementos de S están regidas por las mismas leyes que rigen las relaciones correspondientes entre los elementos de S'.

Este género de analogía entre S y S' está ilustrado por lo que hemos tratado en el párrafo 1. Sean S los lados del rectángulo y S' las caras del paralelepípedo rectangular.

II) Los elementos de los dos sistemas S y S' se corresponden biunívocamente bajo ciertas relaciones. Es decir, que si existe una relación entre los elementos de uno de los sistemas, la misma relación debe existir entre los elementos correspondientes del otro sistema. Este tipo de relación entre dos sistemas es un género muy particular de analogía; recibe el nombre de isomorfismo (o isomorfismo holoedro).

III) Los elementos de dos sistemas S y S'' se corresponden entre sí de tal modo que un elemento de S corresponde a varios elementos de S' bajo ciertas relaciones. Este género de relación (importante en diversas ramas del estudio avanzado de matemáticas, en particular para la Teoría de Grupos, pero que no podemos tratar aquí en forma detallada) recibe el nombre de isomorfismo meroedro (u homomorfismo, siendo quizá mejor término el de homeomorfismo). Se puede considerar el isomorfismo meroedro como otro tipo muy preciso de analogía.]

Bolzano Bernardo (1781-1848), logista y matemático, dedicó una extensa parte de su importante obra de lógica, *Wissenschaftslehre,* al tema de la heurística (vol. 3, págs. 293-575). Escribe acerca de esta parte de su obra: "No pretendo en lo absoluto presentar aquí ningún procedimiento de investigación que no sea conocido desde hace tiempo de los hombres de talento; no creo que encuentren aquí nada completamente nuevo en la materia. Pero voy a esmerarme en asentar, en términos claros, las reglas y los caminos de la investigación seguidos por todo hombre capaz, aunque en la mayoría de los casos los sigue sin tener plena conciencia de ello. Si bien ignoro si he tenido o no pleno éxito en esta empresa, guardo al menos la ilusión que mi modesta contribución sea del gusto de algunos y tenga aplicaciones más tarde."

"Brillante idea", así como "buena idea", son expresiones corrientes de la posibilidad de un adelanto súbito hacia la solución. (Véase PROGRESO Y LOGRO, 6; página 160.) La ocurrencia de una brillante idea es una experiencia familiar a todo el mundo, pero difícil de describir. Por ello nos parece interesante citar una sugestiva descripción de ella, proporcionada incidentalmente por una autoridad tan antigua como Aristóteles.

Se convendrá, en general, que el concebir una idea brillante es un "acto de sagacidad". Aristóteles define "sagacidad" como sigue: "Sagacidad es descubrir adivinando una relación esencial en un lapso de tiempo inapreciable. Así, por ejemplo, si usted ve a alguien hablar de un cierto modo a un hombre rico, usted puede adivinar instantáneamente que la persona está tratando de conseguir dinero prestado. O bien, observando que la parte brillante de la luna está siempre frente al sol, usted puede de pronto saber el porqué; esto es, porque la luna está iluminada por la luz del sol." *

El primer ejemplo, sin ser malo, es un tanto trivial. No se requiere mucha sagacidad para suponer algo de esta índole acerca de los ricos y el dinero. La idea no es muy brillante. El segundo ejemplo, por el contrario, es notable si hacemos un pequeño esfuerzo de imaginación para situarlo en su propio escenario.

Hay que tener presente que en tiempos de Aristóteles había que observar el sol y las estrellas si se quería conocer la hora, ya que los relojes no existían, y se tenían que observar las fases de la luna si se quería viajar de noche, dado que no había alumbrado público. Se estaba, pues, en aquel entonces muy familiarizado con el cielo que un habitante de la ciudad de hoy en día, y su natural inteligencia no estaba falseada por la mediocre asimilación de artículos periodísticos divulgando teorías astronómicas. Veían la luna como un disco plano, similar al disco del sol, pero mucho menos brillante. Se han debido de asombrar de los incesantes cambios de formas y de posiciones de la luna. Ocasionalmente la observaban a la luz del día, hacia el amanecer o hacia el ocaso, y descubrían "que el lado brillante de la luna siempre está hacia el sol", lo cual constituye para ellos un respetable logro. Ahora conciben que los aspectos variantes de la luna son parecidos a los de una pelota que fuese iluminada desde un lado tal que la mitad permaneciese iluminada y la otra mitad oscura. De ahí la concepción del sol y de la luna no como discos planos, sino como cuerpos redondos, uno dando y el otro recibiendo la luz. Se comprende entonces

* Traducción ligeramente modificada del texto griego.

la relación esencial, se modifican sus anteriores concepciones instantáneamente, "en un lapso de tiempo inapreciable". He ahí un súbito salto de la imaginación, una brillante idea, un destello de ingenio.

Condición. Es la parte principal de un "problema por resolver". (Véase PROBLEMAS POR RESOLVER, PROBLEMAS POR DEMOSTRAR, 3; página 161. Véase también TÉRMINOS ANTIGUOS y NUEVOS, 2; página 191.)

Una condición se dice *redundante* si contiene elementos superfluos. Se dice *contradictoria* cuando sus elementos se oponen unos a otros y son incompatibles de tal suerte que ningún objeto puede satisfacer la condición.

Así por ejemplo, si una condición se expresa por un número de ecuaciones lineales mayor que el número de las incógnitas, puede ser redundante o contradictoria. Por el contrario, si la condición se expresa por un número menor de ecuaciones que de incógnitas, es insuficiente para determinar las incógnitas. Por último, si la condición se expresa por igual número de ecuaciones como de incógnitas, es en general suficiente para determinar las incógnitas, pero puede, en ciertos casos excepcionales, ser contradictoria o insuficiente.

¿Conoce algún problema que se relacione con el suyo? Es prácticamente imposible imaginar un problema completamente nuevo, que no se parezca en nada a otro o que no tenga ningún punto en común con un problema anteriormente resuelto; por lo demás, si un tal problema existiese sería insoluble. De hecho, cuando resolvemos un problema, debemos siempre valernos de los que ya hemos resuelto, valernos de sus resultados, del método empleado o de la experiencia adquirida al resolverlos. Y, claro está, los problemas de los cuales nos valemos estarán en algún modo relacionados al que nos ocupa. De ahí la pregunta: *¿Conoce algún problema que se relacione con el suyo?*

En general, no se tiene ninguna dificultad en recordar problemas ya resueltos que están más o menos relacionados con el propuesto. Por el contrario, la dificultad estriba en que, encontrándose muchos, resulta difícil elegir el que sea realmente útil. Debemos buscar los que estén íntimamente ligados al problema por resolver; hay que MIRAR BIEN LA INCÓGNITA, o buscar un problema ya resuelto que esté ligado al nuestro por medio de la GENERALIZACIÓN, PARTICULARIZACIÓN O ANALOGÍA.

La finalidad de la pregunta que aquí tratamos es lograr la movilización de los conocimientos anteriormente adquiridos (PROGRESO Y LOGRO, 1). Una parte esencial de nuestros conocimientos matemáticos la retenemos en la memoria en forma de teoremas ya demostrados. De ahí la pregunta: *¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?* Esta pregunta puede ser particularmente útil en el caso de un "problema por demostrar", es decir, cuando hay que demostrar o refutar un teorema propuesto.

Contradictorio. Véase CONDICIÓN.

Corolario. Es un teorema que se determina fácilmente y que se deduce del examen de otro teorema que se acaba de demostrar. La palabra proviene del latín; una traducción literal sería "prima" o "propina".

¿Cuál es la incógnita? ¿Qué se pide?; ¿qué se quiere determinar?; ¿qué se le pide que busque?

¿Cuáles son los datos? ¿Qué elementos le dan?; ¿de qué dispone?

¿Cuál es la condición? ¿Por medio de qué condición están relacionadas la incógnita y los datos?

Estas preguntas debe plantearlas el profesor a fin de saber si el enunciado de un problema ha sido comprendido; el alumno debe ser capaz de responder a ellas claramente. Además, estas preguntas atraen la atención del alumno sobre las partes principales de un "problema por resolver", sobre la incógnita, los datos, la condición. Como puede ser necesaria la repetida consideración de estas partes, es conveniente repetir con frecuencia esas preguntas en todas las fases de la solución. (Véanse los ejemplos de las secciones **8, 10, 18, 20;** PLANTEO LA ECUACIÓN, 3, 4, páginas 145-146; PROBLEMAS PRÁCTICOS, 1, página 163; ENIGMAS, página 85.)

Estas preguntas son de la mayor importancia para todo aquel que tenga un problema por resolver. Le permiten medir su propia comprensión del problema, concentrar su atención sobre esta o aquella parte principal del problema. La solución consiste esencialmente en relacionar la incógnita con los datos. Por ello, al resolver un problema, no se deben de perder de vista en ningún momento dichos elementos y preguntarse: *¿Cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?*

El problema puede tener numerosas incógnitas. La condición puede presentar diversas partes que deben considerarse por separado. Puede resultar ventajoso el considerar los datos también por separado. En estos diversos casos, conviene introducir ciertas modificaciones en las preguntas, como por ejemplo: ¿Cuáles son las incógnitas?; ¿cuál es el primer dato?; ¿cuál es el segundo dato?; ¿cuáles son las diversas partes de la condición?; ¿cuál es la primera cláusula de la condición?

Las principales partes de un "problema por demostrar" son la hipótesis y la conclusión, siendo las preguntas correspondientes: *¿Cuál es la hipótesis?; ¿cuál es la conclusión?* Aquí también podemos necesitar variar la expresión verbal, modificar esas preguntas tan frecuentemente útiles, preguntando por ejemplo: ¿De qué hipótesis parte usted?; ¿cuáles son las diversas partes de su hipótesis? (Ejemplo en la sección **19.**)

Definición. Definir un término es dar su significado en otros términos que se suponen conocidos.

1. En matemáticas existen dos tipos de *términos técnicos*. Algunos se

aceptan como términos primarios y no se les define. Otros se consideran como términos derivados y se definen de un modo formal, es decir, que se da su significado por medio de términos primitivos y de términos derivados, pero previamente definidos. Así pues, no se da una definición formal de nociones primarias tales como el punto, la recta, el plano.* Por el contrario, se definen de un modo formal nociones tales como la "bisectriz de un ángulo", la "circunferencia", la "parábola".

Podemos expresar como sigue la definición de este último término: se llama *parábola* al lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de un punto fijo y de una recta fija. El punto fijo recibe el nombre de *foco* de la parábola, la recta fija su *directriz.* Se sobreentiende que todos los elementos considerados están en un plano fijo, y que el punto fijo (foco) no se halla sobre la recta fija (directriz).

El lector puede no conocer el significado de los términos definidos: parábola, foco, directriz. Pero se supone que conoce el significado de todos los otros términos, tales como el punto, la recta, el plano, distancia entre dos puntos, fijo, lugar geométrico, etc.

2. *Las definiciones dadas en los diccionarios* no difieren mucho de las definiciones matemáticas por su forma exterior, pero están redactadas bajo una idea diferente.

El autor de un diccionario se ocupa del sentido usual de las palabras. *Acepta,* naturalmente, dicho sentido usual y lo establece lo más claramente posible bajo la forma de una definición.

El matemático, por el contrario, no se ocupa del sentido usual de sus términos técnicos; al menos no es esta su preocupación principal. Lo que las palabras "circunferencia" o "parábola" —o todo otro término técnico del mismo género— pueden significar en el lenguaje común y corriente, no tiene gran importancia para él. La definición matemática *crea* el significado matemático.

3. *Ejemplo.* Determinar el punto de intersección de una recta dada y una parábola cuyo foco y directriz son dadas.

Nuestro modo de abordar cualquier problema dependerá del estado de nuestros conocimientos. En el problema presente dependerá principalmente de los conocimientos que tengamos de las propiedades de la parábola. Si conocemos bien la parábola, trataremos de utilizar nuestros conocimientos y entresacar de ellos alguno útil: *¿Conoce algún teorema que le pueda ser*

* A este respecto, las ideas han cambiado desde el tiempo de Euclides y sus discípulos, los cuales definían el punto, la recta y el plano. Sin embargo, estas "definiciones" son poco formales, constituyen más bien una especie de ilustraciones intuitivas. Dichas ilustraciones, claro está, son permitidas e incluso muy recomendables en la enseñanza.

útil? ¿Conoce algún problema que se relacione al suyo? Si nuestros conocimientos en lo que concierne a la parábola son limitados, el foco, la directriz son términos más bien molestos y, naturalmente, desearíamos deshacernos de ellos. ¿Cómo lograrlo? Oigamos el diálogo entre el profesor y el alumno discutiendo el problema propuesto. Ya han elegido una *notación apropiada*: *P* para uno cualquiera de los puntos de intersección desconocidos, *F* para el foco, *d* para la directriz, *c* para la recta que intersecta a la parábola.

—*¿Cuál es la incógnita?*

—El punto *P*.

—*¿Cuáles son los datos?*

—Las rectas *c* y *d*, y el punto *F*.

—*¿Cuál es la condición?*

—*P* es un punto de intersección de la recta *c* y de la parábola cuya directriz es *d* y su foco *F*.

—Correcto. Sé que no han tenido muchas ocasiones de estudiar la parábola, pero creo, sin embargo, que pueden decir lo que es una parábola.

—La parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes del foco y de la directriz.

—Bien. Veo que recuerdan correctamente la definición. Muy bien, pero hay que saber también utilizarla: *regrese a las definiciones.* Conociendo la definición de la parábola, ¿qué puede decir del punto *P?*

—*P* se halla en la parábola. Por lo tanto *P* está a igual distancia de *d* y de *F*.

—¡Muy bien! *Dibuje una figura.*

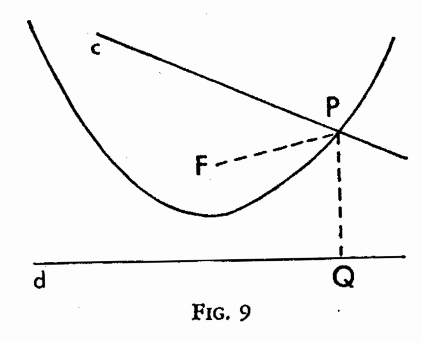


FIG. 9

El alumno introduce en la figura 9 los segmentos *PF* y *PQ*, este último perpendicular a *d*.

—Ahora, *¿puede enunciar el problema en diferentes términos?*

—. . .

—¿Puede enunciar la condición del problema valiéndose de los segmentos que acaba de introducir?

—*P* es un punto de la recta *c* tal que $PF = PQ$.

—Bien, pero dígalo en palabras. ¿Qué es *PQ*?

—La perpendicular de *P* a *d*.

—Bien. ¿Puede ahora enunciar el problema en forma diferente? Pero, por favor, trate de ser claro y conciso.

—Determinar un punto *P* sobre una recta *c* dada, a igual distancia del punto dado *F* y de la recta dada *d*.

—Observe el progreso logrado desde el enunciado original del problema hasta este último. Aquél estaba lleno de términos técnicos, poco familiares: parábola, foco, directriz; tenía un aire solemne, ampuloso. Ahora no queda nada de esos términos. Ha *simplificado* usted el problema. ¡Bien hecho!

4. *Eliminación de términos técnicos;* tal es el resultado logrado en el ejemplo precedente. Partimos de un enunciado que contenía varios de esos términos (parábola, foco, directriz) para llegar finalmente a un nuevo enunciado desprovisto de ellos.

Para poder eliminar un término técnico hay que conocer su definición; pero ello no basta, hay que emplearla. En el ejemplo precedente, no bastaba conocer la definición de la parábola. El paso decisivo fue introducir en la figura los segmentos *PF* y *PQ*, cuya igualdad estaba asegurada por la propia definición de la parábola. Ese es el proceso típico. Se introducen elementos apropiados en la concepción del problema. Después, sobre la base de la definición, se establecen relaciones entre los elementos introducidos. Si estas relaciones expresan completamente el significado del término, hemos utilizado la definición y, habiéndola utilizado, hemos eliminado el término técnico.

El proceso que acabamos de describir puede llamarse *el regreso a las definiciones.*

Volviendo a la definición de un término técnico eliminamos dicho término, pero introducimos en su lugar nuevos elementos y nuevas relaciones. El cambio producido en nuestra concepción del problema puede ser importante. De todas formas se obtendrá un nuevo enunciado, alguna VARIACIÓN DEL PROBLEMA, página 193.

5. *Definiciones y teoremas conocidos.* Si conocemos la palabra "parábola" y tenemos una vaga idea de la forma de la curva, sin saber nada más acerca de ella, nuestros conocimientos son, en toda evidencia, insuficientes para poder resolver el problema propuesto o cualquier otro relativo a la parábola. ¿Qué tipo de conocimientos se requieren para tal propósito?

Se puede considerar que la geometría consiste en axiomas, en definiciones y en teoremas. La parábola no forma parte de los axiomas, los cuales tratan solamente de términos primarios, tales como el punto, la recta, etc. . . Toda argumentación geométrica relativa a la parábola, la solución de todo problema que la concierne, implica ya sea a su definición o algún teorema que se aplique a ella. Así pues, para resolver este tipo de problemas debemos al menos conocer la definición y mejor si conocemos además algunos teoremas.

Lo que hemos dicho acerca de la parábola es cierto, por supuesto, de toda noción derivada. Cuando empezamos a resolver un problema donde interviene una noción de este género, no podemos saber de momento si será mejor emplear la definición de esta noción o un teorema que la concierna; pero lo que es seguro es que tendremos que emplear lo uno o lo otro.

Hay casos, sin embargo, donde no hay elección posible. Si sólo conocemos la definición de la noción y nada más, entonces estamos obligados a emplearla. Si no sabemos mayor cosa aparte de la definición, nuestras posibilidades radican en ella y a ella nos debemos de reportar. Pero si conocemos diversos teoremas aplicables a la noción, si tenemos una grande experiencia en su empleo, es posible que se nos ocurra un teorema apropiado que concierna a dicha noción.

6. *Definiciones múltiples.* La esfera se define usualmente como el lugar geométrico de los puntos situados a una distancia dada de un punto dado. (Los puntos se consideran ahora en el espacio, no restringidos a un plano.) También se puede definir como la superficie engendrada por un círculo que gira alrededor de uno de sus diámetros. Existen igualmente otras definiciones de la esfera, y muchas otras serían posibles.

Cuando el problema por resolver concierne a alguna noción derivada, como la "esfera" o la "parábola" y queremos remitirnos a su definición, cabe la elección entre varias definiciones. Mucho puede depender entonces de la elección de la definición apropiada al caso.

Determinar la superficie de la esfera era un problema importante y difícil en la época en que Arquímedes lo resolvió. Arquímedes tenía que elegir entre las definiciones que acabamos de dar. Prefirió concebir la esfera como la superficie engendrada por un círculo girando alrededor de un diámetro fijo. Inscribió en el círculo un polígono regular, de un número par de lados, dos de cuyos vértices opuestos se unían por el diámetro fijo del círculo. El polígono regular se aproxima al círculo y, girando con él, engendra una superficie convexa compuesta, por una parte de dos conos cuyos vértices están en los puntos extremos del diámetro fijo, y por otra parte, entre los conos, de varios troncos de cono. Esta superficie compuesta iguala aproximadamente la de la esfera y Arquímedes la empleó para

calcular el área de la esfera. Si concibiésemos la esfera como el lugar geométrico de los puntos situados a igual distancia del centro, dicha concepción no sugiere entonces ninguna aproximación sencilla a la superficie de la esfera.

7. Es de capital importancia el referirse a las definiciones tanto para poner en pie un razonamiento como para verificarlo.

Si alguien que no tenga más que una vaga idea de lo que es una esfera, presenta una nueva solución del problema de Arquímedes, su solución no será buena. Puede tener una clara idea de la esfera, pero si no se sirve de dicha noción en su razonamiento, nada indica que la tiene y su razonamiento no será bueno. Es por ello que, escuchando su argumentación, espero el momento en que va a enunciar alguna cosa importante sobre la esfera, valiéndose de la definición o de algún teorema. Si tal momento no llega, su solución no es buena.

De este modo, podemos verificar no solamente los razonamientos de otros, sino también, por supuesto, nuestros propios argumentos. *¿Han tenido en cuenta todas las nociones esenciales que el problema concierne?* ¿De qué modo ha utilizado dicha noción? ¿Se ha valido de su significado, de su definición? ¿Ha utilizado todos los hechos esenciales, todos los teoremas que usted conoce acerca de ello?

Que el hecho de referirse a las definiciones para examinar la validez de un razonamiento es importante, ha sido subrayado por Pascal a quien debemos la regla de "substituer mentalment les définitions à la place des définis" (sustituir mentalmente las definiciones en lugar de los términos definidos). Que sea también importante el referirse a las definiciones para encontrar la solución ha sido subrayado por Hadamard.

8. Referirse a las definiciones es, pues, una importante operación mental. Para comprender la razón de tal motivo nos hace falta darnos cuenta, primero, de la importancia de las propias palabras. Es evidente que difícilmente podemos pensar sin valernos de palabras, signos o símbolos cualesquiera. Las palabras y los signos están, pues, dotados de cierta potencia; para los pueblos primitivos tienen incluso un poder mágico. Podemos comprender las razones de dicha creencia, pero sin compartirla. Debemos saber que el poder de una palabra no reside en su sonoridad, la *vocis flatus*, en la entonación de quien la pronuncia, sino en las ideas que dicha palabra nos sugiere y, en última instancia, en los hechos sobre los cuales se basan dichas ideas.

Es, pues, lógico el buscar detrás de las palabras, el significado y los hechos. Refiriéndose a las definiciones, el matemático busca establecer las relaciones que existen entre los objetos matemáticos que camuflan los términos técnicos; como el físico busca experiencias precisas detrás de sus términos técnicos; en fin, como el hombre común, si está dotado de sentido común, que preferirá la dura realidad de los hechos al engaño de meras palabras.

Descartes, René (1596-1650), filósofo y gran matemático, se propuso encontrar un método universal para la solución de problemas, pero dejó inconclusas sus *Regulae ad Directionem Ingenii*. Los fragmentos de este tratado, encontrados en sus manuscritos y editados después de su muerte, contienen sobre la forma de resolver problemas más material —y material más interesante— que el que contiene su más conocida obra *Discours de la Méthode*, pese a que probablemente éste haya sido escrito después que las "Reglas". Parece que las siguientes líneas de Descartes describen el origen de las "Reglas": "Cuando, en mi juventud, oía hablar de invenciones ingeniosas, trataba de saber si no podría inventarlas yo mismo, sin incluso leer al autor, así advertí paulatinamente que me conformaba a ciertas reglas."

Descomponer y recomponer el problema son dos importantes operaciones de la mente.

Examina usted un objeto que despierta su interés o mueve su curiosidad: una casa que tiene la intención de alquilar, un telegrama importante, pero enigmático, un objeto cualquiera cuyo uso y origen le intrigan, o un problema que quiere resolver. Considera el objeto como un todo, pero esa impresión quizá no es muy precisa. Un detalle le llama la atención. Después se concentra sobre otro detalle, y más tarde, sobre otro nuevamente. Diversas combinaciones de detalles se pueden presentar y al cabo de un momento, mira de nuevo el objeto como un todo, pero lo ve de una manera diferente. Usted ha descompuesto el todo en sus diversas partes y ha recompuesto dichas partes en un todo más o menos diferente.

1. Si entra en los detalles corre el riesgo de perderse. Particularidades muy numerosas o muy insignificantes ofuscan la mente. Pueden impedirle el dedicarle una atención suficiente al punto esencial o incluso le impiden ver el punto esencial. Recuerden al hombre al que los árboles no le dejan ver el bosque.

Es evidente que no deseamos perder nuestro tiempo en detalles superfluos, debiendo reservarnos para lo esencial. La dificultad estriba en no poder decir por adelantado cuáles son los detalles que finalmente resultaron útiles.

Por ello es conveniente, en principio, comprender el problema como un todo. Comprendiéndolo estaremos en mejor postura para juzgar qué puntos particulares pueden ser los más esenciales. Una vez examinados uno o dos puntos esenciales, estaremos en mejor situación para determinar, entre los otros detalles, los que parecen merecer un examen más a fondo.

Veamos el asunto de más cerca y descompongamos gradualmente el problema, pero sin ir más lejos de lo necesario.

El profesor no puede, naturalmente, esperar que todos los alumnos den pruebas de perspicacia en este aspecto. Por el contrario, ciertos alumnos tienen la tonta y mala costumbre de abordar los detalles antes de haber comprendido el problema en su conjunto.

2. Consideremos los problemas de matemáticas, "problemas por resolver".

Una vez comprendido el problema como un todo, cuando hemos captado su fin, su idea directriz, es el momento de entrar en detalles. ¿Por dónde empezar? En casi todos los casos es razonable empezar por el examen de los elementos principales del problema como son la incógnita, los datos y la condición. Casi siempre también es aconsejable el comenzar el examen detallado por las siguientes preguntas: *¿Cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?; ¿cuál es la condición?*

Para un examen más detallado todavía, ¿qué conviene hacer? Se puede aconsejar, con frecuencia, el considerar cada dato por sí mismo, *distinguir las diversas partes de la condición* y examinar cada una de ellas por separado.

A veces es necesario, sobre todo si el problema es bastante difícil, el descomponerlo minuciosamente y examinar los detalles más ínfimos. Entonces puede ser necesario *referirse a la definición* de ciertos términos, introducir nuevos elementos implícitos en la definición y someterlos a un examen.

3. Después de descomponer el problema, trataremos de recomponer sus elementos de un modo diferente. Podemos tratar, por ejemplo, de combinar los elementos en un problema nuevo, más accesible y del que nos podremos valer, dado el caso, como de un problema auxiliar.

Las posibilidades de recomponer un problema son ilimitadas. Los problemas difíciles, en particular, se prestan a combinaciones isotéricas excepcionales, singulares, y el ingenio del que los resuelve se revela en la originalidad de sus combinaciones. Existen, sin embargo, ciertos tipos de combinaciones usuales y relativamente simples, suficientes en los casos de problemas poco complicados que hay que conocer a fondo y probarlas en primer lugar, incluso si después estamos obligados a recurrir a procedimientos menos evidentes.

Una clasificación formal asigna un lugar preciso a las combinaciones más usuales y más prácticas. Cuando deducimos un nuevo problema a partir del que nos han propuesto, podemos:

1) conservar la incógnita y cambiar los otros elementos (los datos y la condición); o

2) conservar los datos y cambiar los otros elementos (la incógnita y la condición); o

3) cambiar a la vez la incógnita y los datos.

Vamos a examinar estos casos.

[Los casos 1) y 2) se traslapan. En efecto, es posible conservar a la vez la incógnita y los datos y transformar el problema no cambiando más que la forma de la condición. Por ejemplo, los dos problemas siguientes, bien que visiblemente equivalentes, no son exactamente los mismos:

Construir un triángulo equilátero, dado uno de sus lados.

Construir un triángulo equiángulo, dado uno de sus lados.

La diferencia de los enunciados es mínima en el presente ejemplo, pero puede ser capital en otros casos. Estos casos son incluso importantes en cierto aspecto pero, por falta de espacio, renunciamos a discutirlos aquí. Compárese con PROBLEMA AUXILIAR, 7, última observación, página 157.)

4. *Conservar la incógnita* y cambiar los datos y la condición es con frecuencia conveniente con el fin de transformar el problema propuesto. La sugerencia MIRE BIEN LA INCÓGNITA se aplica a los problemas que tienen la misma incógnita. Podemos tratar de acordarnos de algún problema del mismo tipo ya resuelto: *Y trate de recordar algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.* Si no podemos recordar tal problema, podemos tratar de inventar uno: *¿Podría pensar en otros datos que le permitiesen determinar la incógnita?*

Un nuevo problema, estrechamente ligado al problema propuesto, tiene muchas posibilidades de ser útil. Así pues, conservando la incógnita, trataremos igualmente de conservar ciertos datos y ciertas partes de la condición y cambiar lo menos posible, solamente uno o dos datos y una pequeña parte de la condición. Un buen método consiste en no tener en cuenta ciertos puntos, pero sin añadir nada; conservamos la incógnita, *no conservamos más que una parte de la condición, descartamos la otra,* pero sin introducir ninguna cláusula o dato nuevo. En los párrafos 7 y 8 se encontrarán ejemplos y comentarios a este respecto.

5. *Conservando los datos* podemos tratar de introducir una nueva incógnita útil y más accesible. Deberá obtenerse a partir de los datos primitivos. Pensamos en una incógnita de este tipo cuando preguntamos: ¿PODRÍA DEDUCIR DE LOS DATOS ALGÚN ELEMENTO ÚTIL?, (página 146).

Observemos que aquí se desean dos cosas. Primero, la nueva incógnita debe ser más accesible que la original, es decir, debe poder ayudar en forma precisa a la determinación de la incógnita del problema original. En resumidas cuentas, la nueva incógnita debe ser una especie de *peldaño.* Una piedra a mitad de un riachuelo está más cerca de mí que la otra orilla; apoyándome en ella podré alcanzar dicha orilla.

La nueva incógnita deberá ser, pues, accesible y útil a la vez, pero en la práctica frecuentemente nos tenemos que conformar con menos. A falta de algo mejor, es aconsejable el tratar de deducir de los datos todo aquello que pueda parecer útil; es incluso lícito ensayar una nueva incógnita, íntimamente ligada con la incógnita original, pese que al principio no parezca particularmente accesible.

Por ejemplo, si nuestro problema consiste en determinar la diagonal de un paralelepípedo (como en la sección **8**), podemos considerar la diagonal de una cara como una nueva incógnita. Esta elección proviene ya sea de que *sabemos* que el conocimiento de dicha diagonal nos permitirá obtener la del sólido (como en la sección **10**), o porque consideramos poder determinar fácilmente la diagonal de una cara y *suponemos* que podría ayudarnos a determinar la diagonal del sólido. (Compare: ¿HA EMPLEADO USTED TODOS LOS DATOS?, 1; página 98.)

Si nuestro problema consiste en construir una circunferencia, tenemos que determinar dos cosas, su centro y su radio; podemos decir que nuestro problema consta de dos partes. En ciertos casos una de estas partes es más fácil de resolver que la otra; es una eventualidad, de todos modos, siempre razonable de considerar: *¿Puede resolver una parte del problema?* Planteando esta pregunta, sopesamos el pro y el contra: ¿Conviene más considerar exclusivamente el centro o el radio y elegir el uno o el otro como nueva incógnita? Preguntas de este tipo son con mucha frecuencia útiles. En problemas más complejos o en matemáticas superiores, la idea decisiva consiste con frecuencia en distinguir y tratar por separado una parte del problema más accesible que el resto, pero esencial.

6. *Cambiando a la vez la incógnita y los datos* nos desviamos más del camino primitivo que en los casos precedentes. Esto, naturalmente, puede parecernos molesto; nos parece, en efecto, que corremos el riesgo de perder por completo el problema original. Y sin embargo, podemos estar obligados a recurrir a una modificación de esta importancia si cambios menos radicales no nos aportan nada accesible y útil. Puede ser tentador el alejarnos incluso mucho del problema original si el nuevo problema parece poder conducirnos al éxito. *¿Podría cambiar la incógnita, o los datos o ambos si es necesario a fin de que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más relacionados entre sí?*

Un modo interesante de cambiar a la vez la incógnita y los datos consiste en intercambiar la incógnita con uno de los datos. (Véase: ¿PUEDE UTILIZARSE EL RESULTADO?, 3; página 172.)

7. *Ejemplo.* Construir un triángulo dados un lado a, la altura h perpendicular a a y el ángulo α opuesto al lado a.

¿Cuál es la incógnita? Un triángulo.

¿Cuáles son los datos? Dos elementos lineales a y h y un ángulo α.

Si tenemos alguna experiencia con problemas de construcciones geométricas, trataremos de reducir este tipo de problema a la determinación de un punto. Trazaremos un segmento BC igual al lado dado a; entonces todo lo que tenemos que determinar es el vértice A del triángulo, opuesto a a (ver figura 10).

De hecho, estamos ante un nuevo problema.

¿Cuál es la incógnita? El punto A.

FIG. 10

¿Cuáles son los datos? Un elemento lineal h, un ángulo α y dos puntos B y C cuyas posiciones son dadas.

¿Cuál es la condición? La perpendicular del punto A al segmento BC debe ser igual a h, y el $\measuredangle BAC = \alpha$.

Hemos, pues, transformado el problema cambiando a la vez la incógnita y los datos. La nueva incógnita es un punto, la original era un triángulo. Algunos de los datos son los mismos en ambos problemas, el segmento h y el ángulo α; pero en el problema original se nos daba un segmento a y ahora tenemos dos puntos, B y C.

El nuevo problema no es difícil. La siguiente sugerencia nos lleva casi directamente a la solución.

Distinguir las diversas partes de la condición. La condición consta de dos partes, una concerniente al dato h, la otra al dato α. El punto que desconocemos debe cumplir:

I) estar situado a una distancia h del segmento BC;

II) ser el vértice de un ángulo de una amplitud dada α, cuyos lados pasen por los puntos B y C.

Si *no conservamos más que una parte de la condición y descartamos la segunda,* el punto desconocido no está completamente determinado. Hay, en efecto, numerosos puntos que satisfacen la parte I) de la condición, a saber, todos los puntos de una paralela a la línea BC a la distancia h de

dicho segmento.* Esta paralela es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la parte I) de la condición. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la parte II) es un cierto arco de circunferencia cuyos puntos extremos son *B* y *C*. Determinando esos dos lugares geométricos, sabemos que su intersección es el punto que deseamos determinar.

El proceso que acabamos de aplicar presenta un cierto interés. Al resolver problemas de construcción geométrica podremos muchas veces adoptar con éxito esta forma de proceder: reducir el problema a la determinación de un punto y determinarlo como la intersección de dos lugares geométricos.

Pero en dicho proceso hay un paso que presenta un interés más general; al abordar todo tipo de "problemas por resolver" podemos adoptar la sugerencia: *No conserve más que una parte de la condición y descarte la otra.* Procediendo así, "debilitamos" la condición del problema propuesto, limitamos menos la incógnita. *¿En qué medida la incógnita está entonces determinada, cómo puede variar?* Plantear esta pregunta es en realidad plantear un nuevo problema. Si la incógnita es un punto del plano (como en nuestro ejemplo), la solución de este nuevo problema consiste en determinar el lugar geométrico descrito por el punto. Si la incógnita es un objeto matemático de cualquier otro tipo (era un cuadrado en la sección **18**), tendremos que describir en forma correcta y caracterizar de un modo preciso un cierto conjunto de objetos. Incluso si la incógnita no es un objeto matemático (como en el siguiente ejemplo, 8) puede ser útil considerar, caracterizar, describir o enumerar sobre una lista los objetos que satisfacen a una cierta parte de la condición impuesta a la incógnita.

8. *Ejemplo.* En un crucigrama que admite juegos de palabras y anagramas, encontramos la siguiente definición:

"En una máquina en los dos sentidos (5 letras)."

¿Cuál es la incógnita? Una palabra.

¿Cuál es la condición? La palabra consta de cinco letras. Designa una parte de una máquina. Debe ser, claro está, una palabra española, y esperemos que no muy rebuscada.

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? No. O más bien, puede ser suficiente, pero la parte que está clara por ahora resulta insuficiente. Hay muchas palabras que pueden satisfacerla, tales como "biela", "rueda", etc.

La condición se expresa de modo ambiguo voluntariamente. Si en una máquina no se encuentra ningún órgano, ninguna pieza susceptible de ser

* El plano queda dividido en dos partes por la recta determinada por *B* y *C*. Eligiremos uno de los semiplanos donde considerar *A* y así sólo tendremos que considerar una sola paralela a *BC;* de lo contrario tendríamos que considerar dos.

definida en su función "en los dos sentidos" podemos sospechar que se ha querido decir "que se lee en los dos sentidos". Puede ser una buena idea examinar esa interpretación del enigma.

Distinguir las diversas partes de la condición. La condición consta de dos partes, una que concierne su significado, la otra su ortografía. La palabra desconocida debe ser:

I) Una palabra corta que designe una parte de una máquina.

II) Una palabra de cinco letras, que leída al revés, resulte también una palabra que designe una parte de una máquina.

Si *no conservamos más que una parte de la condición y descartamos la otra,* la incógnita no queda completamente determinada. Existen muchas palabras que satisfacen la parte I) de la condición, tenemos una especie de lugar geométrico. Podemos "describir" dicho lugar geométrico I), "seguirlo" hasta su "intersección" con el lugar geométrico de la parte II). El proceso natural consiste en concentrarse sobre la parte I) de la condición, recordar palabras que respondan al significado pedido y examinar en cada una de estas palabras si tiene o no el largo requerido y si se puede leer en ambos sentidos. Quizá tengamos que ensayar varias palabras antes de encontrar la adecuada: "árbol", "biela", "rueda", "motor".

—"Rotor", ¡claro!

9. En el párrafo 3, hemos clasificado las diversas posibilidades de obtener un nuevo "problema por resolver", combinando ciertos elementos del "problema por resolver" propuesto. Si hacemos aparecer no uno solo, sino dos o varios problemas nuevos, las posibilidades son mayores; las mencionaremos pero sin tratar de clasificarlas.

Pueden incluso presentarse otras posibilidades. En particular, la solución de un "problema por resolver" puede depender de la de un "problema por demostrar". Nos limitaremos a mencionar esta posibilidad; consideraciones de espacio nos impiden el discutirla aquí.

10. Sólo añadiremos algunas observaciones sucintas sobre los "problemas por demostrar"; por lo demás, son análogas a los comentarios más extensos que acabamos de hacer en torno a los "problemas por resolver" (párrafos 2 a 9).

Una vez comprendido este tipo de problema considerándolo como un todo, deberemos en general, examinar sus partes principales que son la hipótesis y la conclusión del teorema a demostrar o a refutar. Debemos comprender perfectamente estos elementos: *¿Cuál es la hipótesis?; ¿cuál es la conclusión?* Si se requiere llegar al examen de puntos más particulares, *podemos distinguir las diversas partes de la hipótesis,* y considerar cada una de ellas por sí misma. Después podemos abordar otros detalles, logrando una descomposición del problema cada vez mayor.

Tras descomponer así el problema, podemos tratar de recombinar sus elementos de algún modo diferente. En particular, podemos tratar de recombinar los elementos en forma de obtener otro teorema. A este respecto se presentan tres posibilidades:

1) *Podemos conservar la conclusión* y cambiar la hipótesis. En primer lugar trataremos de acordarnos de algún teorema del mismo tipo: *Considere la conclusión y trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y cuya conclusión sea idéntica o similar.* Si no logramos acordarnos de tal teorema, podemos tratar de inventar uno: *¿Puede pensar en otra hipótesis de la cual podría fácilmente deducir la conclusión?* Podemos cambiar la hipótesis omitiendo alguno de sus elementos, pero sin añadir nada: *No conserve más que una parte de la hipótesis, descarte la otra; ¿la conclusión sigue siendo válida?*

2) *Conservamos la hipótesis* y cambiamos la conclusión. *¿Puede deducir algo útil de la hipótesis?*

3) *Cambiamos a la vez la hipótesis y la conclusión.* Podemos estar inclinados a cambiar ambas en la medida que no obtengamos ningún resultado al cambiar una sola de ellas. *¿Puede cambiar la hipótesis o la conclusión, o ambas si es necesario, de manera que se acerquen la nueva hipótesis y la nueva conclusión?*

No trataremos aquí de establecer una clasificación de las diversas posibilidades que se nos presentan cuando, al resolver un "problema por demostrar" introducimos dos nuevos "problemas por demostrar", o cuando lo relacionamos con un "problema por resolver" apropiado.

Determinación, esperanza, éxitos. Sería un error el creer que la solución de un problema es un "asunto puramente intelectual"; la determinación, las emociones, juegan un papel importante. Una determinación un tanto tibia, un vago deseo de hacer lo menos posible pueden bastar a un problema de rutina que se plantea en la clase; pero, para resolver un problema científico serio, hace falta una fuerza de voluntad capaz de resistir durante años de trabajo amargos fracasos.

1. La determinación varía según la esperanza o el abatimiento, la satisfacción o la desilusión. Es fácil perseverar cuando se piensa que la solución está próxima, pero es penoso continuar cuando no se ve el medio de vencer una dificultad. Nos regocijamos cuando las previsiones resultan exactas. Nos deprimimos cuando el camino seguido con confianza se encuentra de pronto bloqueado; entonces la determinación vacila.

Point n'est besoin d'espérer pour entreprendre ni réussir pour persévérer (No hace falta esperar para emprender ni lograr para perseverar.) Así habla la voluntad inflexible, el honor y el deber, el hombre noble que defiende una valiosa causa. No es ésta, sin embargo, la clase de determinación del hombre de ciencia, quien debe tener alguna esperanza para emprender algo y algunos éxitos para perseverar. En el trabajo científico es necesario ajustar la determinación a la perspectiva. No se aborda un problema si no ofrece un cierto interés; se pone uno seriamente a hacer el trabajo si parece instructivo; se lanza uno con todo entusiasmo si encierra en sí grandes promesas. Cuando uno se propone alcanzar un fin, no se abandona, pero tampoco se complica la situación sin necesidad. No se desprecia ningún éxito por ínfimo que sea, al contrario, se le busca: *si usted no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero un problema relativo.*

2. Cuando un alumno comete errores verdaderamente garrafales, cuando es de una lentitud exasperante, casi siempre es por las mismas razones; no tiene absolutamente ningún deseo de resolver el problema, no desea incluso comprenderlo como es debido, y por tanto, no lo comprende. Así, el profesor que desee realmente ayudar a un alumno, debe ante todo despertar su curiosidad, comunicarle el deseo de lograrlo. Debe también conceder al alumno un cierto tiempo para reflexionar, al cabo del cual quizá se decida a trabajar.

La solución de problemas es una escuela de la voluntad. Resolviendo problemas que parecen difíciles, el alumno aprende a perseverar pese a los fracasos, a apreciar el menor de los progresos, a lograr la idea esencial, a hacer un llamado a toda su fuerza de concentración. Si el alumno no encuentra en la escuela la oportunidad de familiarizarse con las diversas emociones que ofrece el esfuerzo con vista a la solución, su educación matemática ha fallado en su objeto más esencial.

Diagnóstico. Esta palabra, que empleamos aquí como un término técnico en materia de educación, significa: "apreciación precisa del trabajo del alumno". La calificación informa sobre este punto, pero en forma demasiado general. El profesor que quiera mejorar el trabajo de sus alumnos necesita una apreciación más detallada de las cualidades y de los defectos de cada uno de ellos, como el médico que necesita un diagnóstico para mejorar la salud de un paciente.

Estamos aquí particularmente interesados en la aptitud de los alumnos para resolver problemas. ¿Cómo apreciarla? Puede ser ventajoso distinguir las cuatro fases de la solución. En efecto, el comportamiento de los alumnos en el curso de estas diversas fases es característico.

La laguna más frecuente al resolver un problema es quizá la incompleta *comprensión del problema,* producto de una falta de concentración. Con respecto a la *concepción del plan* y la obtención de la idea general de la solución, dos defectos opuestos son frecuentes. Unos alumnos se lanzan a hacer cálculos y construcciones sin ningún plan, sin ninguna idea general;

otros torpemente esperan a que la idea venga a su mente, sin hacer nada que acelere su llegada. *Llevando al cabo el plan*, el defecto más frecuente es la negligencia, la falta de paciencia en la verificación de los detalles principales. Es muy frecuente que los alumnos no verifiquen el resultado en lo absoluto; están satisfechos de haber encontrado una respuesta, cierran su cuaderno y no les choca el resultado más inverosímil.

El profesor que ha diagnosticado cuidadosamente tal o cual defecto de este tipo tiene alguna oportunidad de subsanarlo insistiendo sobre algunas preguntas de la lista.

Dibuje una figura. (Véase figuras.) *Introduzca una notación apropiada.* (Véase NOTACIÓN, página 128.)

Distinguir las diversas partes de la condición. Ante todo hay que comprender el problema. Una vez comprendido el problema como un todo, se entra en detalles, se consideran sus diferentes partes, la incógnita, los datos, la condición, y se examinan una tras otra. Hecho esto, teniendo estas diversas partes bien presentes en la mente, aunque no tengamos todavía ninguna idea apropiada, vamos más a fondo en los detalles, considerando cada dato por sí mismo. Habiendo comprendido la condición en su conjunto, *se distinguen sus diversas partes* y se examina cada una de ellas por separado.

Vemos ahora el papel de la sugerencia de la que tenemos que tratar aquí. Tiende a provocar una operación mental que nos lleve a la concepción precisa del problema y nos haga ir más a fondo en los detalles. (Véase: DESCOMPONER Y RECOMPONER EL PROBLEMA, página 73.)

Distinguir las diversas partes de la condición. ¿Puede usted formularlas? Muy a menudo se nos presenta la ocasión de plantearnos esta pregunta cuando procedemos al PLANTEO DE LA ECUACIÓN.

Elementos auxiliares. Nuestra concepción del problema es mucho más rica al final de nuestro trabajo que al principio (PROGRESO Y LOGRO, 1.) En efecto, a medida que nuestro trabajo progresa, vamos añadiendo nuevos elementos a los que considerábamos en el punto de partida. Un elemento que introducimos con la esperanza de que nos ayude a encontrar la solución recibe el nombre de *elemento auxiliar.*

1. Hay diversos tipos de elementos auxiliares. Resolviendo un problema de geometría, podemos introducir nuevas líneas en la figura; son *líneas auxiliares*. Resolviendo un problema de álgebra, podemos introducir una *incógnita auxiliar* (PROBLEMA AUXILIAR, 1). Un *teorema auxiliar* es aquel cuya demostración intentamos deducir con el fin de facilitar la solución del problema inicial.

2. Puede haber diversas razones para la introducción de elementos auxiliares. Es de alegrarnos cuando logramos recordar un *problema relacionado al nuestro y que ya hemos resuelto.* Es probable que podamos utilizarlo, aun sin saber cómo. Sea por ejemplo un problema de geometría el que tengamos que resolver. El que se relaciona, ya resuelto anteriormente, y del que acabamos de acordarnos, es un problema sobre el triángulo. Sin embargo, no hay ningún triángulo en nuestra figura, y para poder emplear el problema del que acabamos de acordarnos nos hace falta uno; vamos, por lo tanto, a introducir uno, añadiendo a nuestra figura las líneas auxiliares apropiadas. En general, si queremos utilizar un problema ya resuelto para resolver el que nos interesa, debemos preguntarnos con frecuencia: *¿Es necesario introducir algún elemento auxiliar para poder emplearlo?* (El ejemplo de la sección **10** es típico.)

El recurso de las definiciones nos proporciona otra posibilidad de introducir elementos auxiliares. Por ejemplo, para utilizar la definición de un círculo, no solamente debemos mencionar su centro y su radio, sino también introducir tales elementos geométricos en nuestra figura. Si no los hacemos aparecer, no podremos hacer ningún uso concreto de la definición; dar una definición sin trazar una figura es dar servicio incompleto.

Tratar de emplear resultados conocidos y recurrir a las definiciones, proporciona excelentes razones para introducir elementos auxiliares; pero no son las únicas. Añadiendo elementos auxiliares a la concepción de nuestro problema contribuimos a hacerlo más rico, más sugestivo, más familiar, sin saber, no obstante, en qué medida los podremos utilizar. Podemos simplemente figurarnos que hay una "idea brillante" en esta forma de concebir el problema con estos elementos adicionales.

Que sea una u otra la razón, la introducción de elementos auxiliares debe, en todo caso, justificarse. No debe introducirse gratuitamente ningún elemento auxiliar.

3. *Ejemplo.* Construir un triángulo, dados un ángulo, la altura correspondiente al vértice del ángulo dado y el perímetro del triángulo.

Introduzcamos una notación adecuada. Sean α el ángulo dado, h la altura correspondiente al vértice A de α y p el perímetro. *Tracemos una figura* en la que coloquemos fácilmente α y h. *¿Hemos empleado todos los datos?* No, la figura no contiene la longitud dada p, igual al perímetro del triángulo. Por lo tanto, debemos introducir p. ¿Pero cómo?

Podemos tratar de introducir p de varios modos. Los que se ven en las figuras 11 y 12 no parecen muy adecuados. Si tratamos de ver por qué parecen tan poco satisfactorios, nos daremos cuenta que es a causa de la falta de simetría.

El triángulo tiene tres incógnitas: sus lados a, b y c. Llamemos a, como es costumbre, al lado opuesto al vértice A; sabemos que

$$a + b + c = p.$$

Ahora bien, los lados b y c son intercambiables. Nuestro problema es simétrico respecto de b y de c. Pero b y c no representan el mismo papel en nuestras figuras 11 y 12. En la forma que hemos colocado p, b y c figuran de diferente modo. Así, las figuras 11 y 12 impiden la natural simetría del

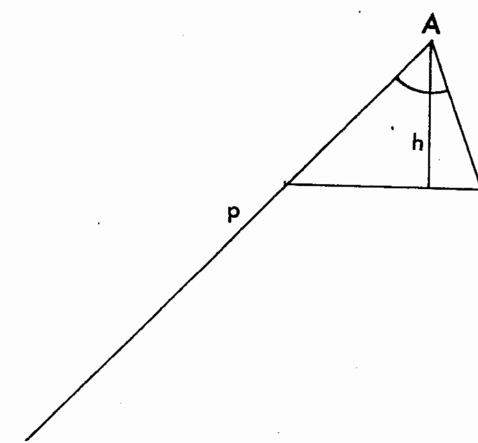


FIG. 11

problema respecto de b y c. Debemos, pues, colocar p de tal forma que esté en la misma relación con b y con c.

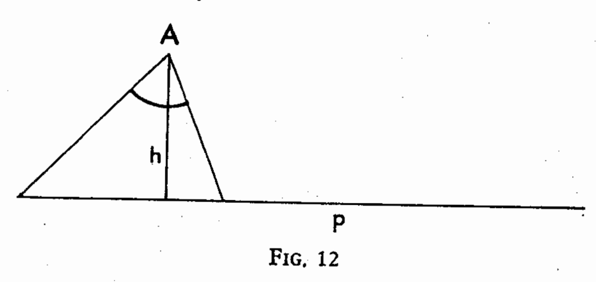


FIG. 12

Esta consideración nos puede sugerir el colocar la longitud p como en la figura 13.

Prolonguemos en ambos sentidos el lado a del triángulo; a un lado llevemos el segmento CE de longitud b, al otro lado llevemos el segmento BD de longitud c, de tal forma que p aparezca en la figura 13 como el segmento ED de longitud

$$b + a + c = p$$

Si tenemos una cierta experiencia en resolver problemas de construcción, no dejaremos de introducir en la figura, junto con ED, las líneas auxiliares AD y AE, cada una de las cuales es la base de un triángulo isós-

celes. Por lo demás, no está fuera de razón el introducir elementos en el problema que son particularmente sencillos y familiares como lo son los triángulos isósceles.

Hemos tenido bastante suerte introduciendo dichas líneas auxiliares. Examinando la nueva figura podemos descubrir que el ángulo EAD está

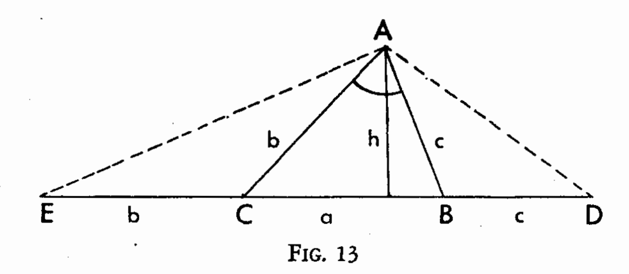


FIG. 13

en una relación muy simple con el ángulo dado α. En efecto, utilizando los triángulos isósceles ABD y ACE, determinamos que el ángulo $DAE = \frac{\alpha}{2} + 90°$. Después de esta observación, es natural intentar la construcción del triángulo DAE. Haciéndolo, introducimos un problema auxiliar mucho más fácil de resolver que el problema original.

Los maestros y autores de libros de texto no deben olvidar que el alumno inteligente y el LECTOR INTELIGENTE no quedan satisfechos verificando que los pasos de un razonamiento son correctos, sino que también quieren saber el motivo y propósito de los diversos pasos. La introducción de un elemento auxiliar es un paso notorio. Si una línea auxiliar, un tanto complicada, aparece de pronto en la figura sin motivo aparente, y permite resolver el problema sorpresivamente, los alumnos y lectores inteligentes quedan contrariados. Se sienten engañados. Las matemáticas son interesantes en la medida que absorben nuestro razonamiento y nuestra fuerza inventiva. Pero no se aprende nada sobre el razonamiento y la invención si el motivo y propósito del más notorio de los pasos permanece incomprensible. Para hacer comprensibles tales pasos por medio de observaciones convenientes (como en el precedente párrafo 3) o por medio de preguntas y sugerencias cuidadosamente escogidas (como en las secciones **10**, **18**, **19**, **20**) tómese todo el tiempo y esfuerzo que se requieran en la seguridad de que valdrán la pena.

Enigmas. Según lo que hemos dicho en la sección 3, las preguntas y sugerencias de nuestra lista son independientes del tema tratado y aplicables a todo tipo de problemas. Puede ser interesante verificar lo dicho sobre varios enigmas.

Tomemos, por ejemplo, las palabras:

HACER DAS NITIDO

El problema consiste en encontrar un "anagrama", es decir, en componer una sola palabra con las letras contenidas en las palabras dadas. Observemos de paso que, para la solución de este enigma, varias preguntas de nuestra lista son pertinentes y pueden incluso guiarnos.

¿Cuál es la incógnita? Una palabra.

¿Cuáles son los datos? Las tres palabras HACER DAS NÍTIDO.

¿Cuál es la condición? La palabra que se desea tiene catorce letras, las letras contenidas en las tres palabras dadas. Probablemente se trata de una palabra española bastante usual.

Dibuje una figura. Puede ser útil señalar sobre el papel catorce espacios en blanco:

....

¿Puede usted enunciar el problema en forma diferente?

Tenemos que encontrar una palabra que contenga las siguientes letras en un cierto orden:

AAEIIO CDDHNRST

Así enunciamos el problema de un modo diferente, pero equivalente (ver PROBLEMA AUXILIAR, 6). Este nuevo enunciado puede ser ventajoso. Separando las vocales de las consonantes (lo que es más importante que el orden alfabético) vemos otro aspecto del problema. Nos damos ahora cuenta que la palabra que se busca consta de seis sílabas, a menos que tenga algún diptongo.

Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero un problema relacionado. Un problema relacionado al nuestro consiste en formar palabras con algunas de las letras dadas. No es difícil formar de esta manera palabras cortas. Después trataremos de encontrar palabras cada vez más largas. En la medida que empleemos más letras, más cerca estaremos de la palabra deseada.

¿Puede resolver una parte del problema? La palabra deseada es tan larga que debe constar de distintas partes. Quizá es una palabra compuesta, o quizá se puede obtener añadiendo a otras palabras una terminación usual. ¿Qué terminación puede ser?

– – – – – – – – – – ENTE
– – – – – – – – – – CION

No conserve más que una parte de la condición y descarte la otra. Podemos tratar de encontrar una palabra larga que tuviese seis sílabas y que constase de dos D, una R y una S.

Las preguntas y sugerencias de nuestra lista no tienen un poder mágico. No pueden darnos la solución de todos los enigmas posibles sin un esfuerzo de nuestra parte. Si el lector desea determinar la palabra debe proseguir con perseverancia y no dejar de pensar en ella. Lo que pueden hacer las preguntas y sugerencias de nuestra lista es ayudarnos a seguir adelante. Cuando nos sentimos descorazonados por repetidos fracasos y a punto de abandonar el problema, pueden sugerirnos una nueva tentativa, un nuevo aspecto, una nueva variación, un nuevo estímulo; así pueden inducirnos a seguir reflexionando.

Para otro ejemplo véase DESCOMPONER Y RECOMPONER EL PROBLEMA, 8; página 78.

¿Es posible satisfacer la condición? *¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?; ¿es insuficiente?; ¿redundante?; ¿contradictoria?*

Estas preguntas son con frecuencia útiles en la primera etapa del problema, cuando no es necesario el responder de un modo definitivo, cuando basta una respuesta provisional, una simple hipótesis. Para ejemplos véanse las secciones **8** y **18.**

Es bueno prever las características del resultado que buscamos. En efecto, cuando tenemos alguna idea de lo que esperamos encontrar estaremos mejor orientados en la búsqueda. Ahora bien, una de las características de un problema es el número de soluciones que admite. Los más interesantes son aquellos problemas que admiten una sola solución; son estos los que estamos inclinados a considerar como únicos "razonables". ¿Es nuestro problema en este sentido "razonable"? Si podemos responder a esta pregunta, aunque sea por medio de una hipótesis plausible, se acrecentará nuestro interés en el problema y trabajaremos mejor.

¿Es nuestro problema "razonable"? La utilidad de tal pregunta en la primera etapa del trabajo es evidente *si* podemos contestar a ella con facilidad. Si, por el contrario, la pregunta es difícil de contestar, la desorientación que causa puede ser mayor que el interés que había en plantearla. Lo mismo es válido para la pregunta: *"¿Es posible satisfacer la condición?"* y para otras preguntas similares de nuestra lista. Debemos plantearlas dado que la respuesta puede ser fácil y plausible, pero no debemos insistir en ellas cuando las respuestas parezcan difíciles u oscuras.

Para los "problemas por demostrar", las preguntas correspondientes son las siguientes: *¿Es verosímil que la proposición sea cierta?; ¿o es más bien falsa?* El modo como se plantea la pregunta muestra claramente que se espera sólo una respuesta hipotética, provisional.

Examen de dimensiones. Es un medio muy conocido, rápido y eficaz, de verificar fórmulas geométricas o físicas.

1. A fin de recordar el proceso de la operación, consideremos un tronco de cono circular. Sean

R el radio de la base inferior,
r el radio de la base superior,
h la altura,
S el área de la superficie lateral.

Si conocemos R, r y h, S queda determinada. Encontramos la expresión

$$S = \pi (R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

la cual queremos verificar por su "dimensión".

La dimensión de una cantidad geométrica es fácil de determinar. Así, R, r y h son longitudes medidas en centímetros, si empleamos unidades científicas: su dimensión es el cm. La superficie S se mide en centímetros cuadrados: su dimensión es el cm². En cuanto a $\pi = 3.14159 \ldots$ es un número abstracto; si queremos adjudicar una dimensión a una cantidad puramente numérica, debemos expresarla en $cm^0 = 1$.

Cada término de una suma debe tener la misma dimensión, que debe ser la misma que la dimensión de la suma. Así, R, r y $R + r$ tienen la misma dimensión, el cm. Los dos términos $(R - r)^2$ y h^2 tienen la misma dimensión (tal como debe de ser), el cm².

La dimensión de un producto es el producto de las dimensiones de sus factores. Existe una regla análoga relativa a las potencias. Sustituyendo las cantidades por sus medidas en ambos miembros de la fórmula que verificamos, obtenemos

$$cm^2 = 1 \cdot cm \cdot \sqrt{cm^2}.$$

lo cual es correcto. Por lo tanto la fórmula puede ser correcta; al menos ha pasado con éxito la prueba por dimensiones.

Para otros ejemplos, ver la sección 14 y ¿PUEDE COMPROBAR EL RESULTADO?, 2; página 167.

2. Podemos verificar por su dimensión el resultado final o los resultados intermedios de un problema, ya se deban a nuestro trabajo, ya al de otros (procedimiento muy útil para descubrir errores en los exámenes escritos). Esta verificación puede igualmente aplicarse a las fórmulas que recordamos o a las que intuimos.

Si por ejemplo recordamos las fórmulas $4\pi r^2$ y $\frac{4\pi r^3}{3}$ para el área y el volumen de la esfera respectivamente, pero sin saber con toda seguridad cual es cual, nos bastará proceder al examen de la dimensión para que desaparezca toda duda al respecto.

3. Esta forma de verificación es más importante en física que en geometría.

Consideremos un péndulo "simple", es decir, un cuerpo pequeño y pesado suspendido de un hilo cuya longitud consideramos invariable y su peso despreciable. Sea l la longitud del hilo g la aceleración gravitacional y T el periodo del péndulo.

Consideraciones mecánicas muestran que T depende solamente de l y de g. ¿Pero, cuál es la dependencia? Podemos acordarnos o intuir que

$$T = cl^m g^n$$

donde c, m, n representan ciertas constantes numéricas. Es decir, suponemos T proporcional a ciertas potencias l^m, g^n de l y g.

Examinemos las dimensiones. Como T es un tiempo, se mide en segundos, su dimensión es S. La dimensión de la longitud l es el cm, la de la aceleración g es $cm \cdot S^{-2}$, y la de la constante c es 1. La ecuación de las dimensiones resultará

$$S = 1 \cdot (cm)^m \, (cm \cdot S^{-2})^n$$

o

$$S = (cm)^{m+n} S^{-2n}$$

Dado que tenemos que obtener las mismas potencias para las unidades fundamentales cm y S a un lado y a otro de la igualdad, resulta que

$$o = m + n \qquad 1 = -2n$$

de donde

$$n = -\tfrac{1}{2} \qquad m = \tfrac{1}{2}$$

Por lo tanto, la fórmula, para el periodo T, debe tener la forma

$$T = cl^{1/2} g^{-1/2} = c \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si bien en el caso presente, la verificación demuestra mucho, no lo demuestra todo. En principio nada dice sobre el valor de la constante c (que de hecho es 2π). Después, no indica dentro de qué límites la fórmula es válida y, sin embargo, sólo es válida para las pequeñas oscilaciones del péndulo e incluso sólo aproximadamente (es correcto para oscilaciones "infinitamente pequeñas"). A pesar de estas limitaciones no es de dudar que el examen de las dimensiones ha permitido prever rápidamente y por los medios más simples una parte esencial de un resultado cuyo completo descubrimiento requiere medios mucho más avanzados. Sucede lo mismo en muchos casos similares.

Examine su hipótesis. Su hipótesis puede ser correcta, pero sería absurdo el tomar una hipótesis por cierta simplemente porque se le ha ocurrido, como hacen la mayor parte de las veces las personas simplistas. Su hipótesis puede no ser correcta. Sería igualmente absurdo el no considerar una hipótesis plausible; este es el defecto en que incurren los pedantes. Ciertas hipótesis merecen ser examinadas y tomadas en serio: aquellas que nos vienen a la mente después de haber procedido a examinar a fondo el problema, de haberlo comprendido y cuando éste ha despertado en nos-

otros verdadero interés. Tales hipótesis contienen al menos una parte de la verdad, pese a que, naturalmente, rara vez la muestran toda. Y sin embargo, examinándolas de cerca es probable descubrirla íntegramente.

Muchas de ellas resultan falsas, pero pueden no obstante, ser útiles en la medida que nos conducen a otras mejores.

No existen en realidad ideas francamente malas, a menos que no tengamos sentido crítico. Lo que realmente es malo es no tener idea alguna, por muy sencilla que sea.

1. *No lo haga.* He aquí una historia típica acerca del señor Juan Lanas. El señor Juan Lanas trabaja en una oficina. Esperaba un pequeño aumento, pero sus esperanzas, como ocurre con frecuencia, fueron defraudadas. Los salarios de algunos de sus colegas fueron aumentados, pero no el suyo. El señor Juan Lanas no se resignó. Se atormentó durante largos días y sospechó, finalmente, que su jefe era el responsable de su infortunio.

No podemos culpar al señor Juan Lanas de tal sospecha. Había ciertos indicios que hacían sospechoso al jefe. El verdadero error fue que el señor Juan Lanas, una vez concebida la sospecha, se negó a ver ninguno de los indicios que apuntaban en otra dirección. Su obsesión fue tal que llegó al punto de persuadirse de que el jefe era su enemigo personal, actuando de tal modo que poco faltó para lograrlo.

El interés de esta historia reside en el hecho de que la mayor parte de la gente se comporta como el señor Juan Lanas. Nunca cambia de opinión sobre las cuestiones básicas. Por el contrario, es una veleta desconcertante en las pequeñeces. Pero jamás pone en duda sus opiniones, importantes o no, por más tiempo que las tenga. Jamás se interroga sobre ellas, no las examina con espíritu crítico — odiaría especialmente este tipo de examen si supiese en qué consiste.

Admitamos que el señor Juan Lanas tenga razón en una cierta medida. Es un hombre ocupado, tiene deberes que cumplir en la oficina y en su casa, dispone de poco tiempo para dedicar a la duda o al examen crítico. En el mejor de los casos quizá pudiese examinar algunas de sus convicciones pero, ¿por qué las pondría en duda si no tiene tiempo de examinar esta duda?

Sin embargo, no procedan como él. No permitan que su sospecha, suposición o hipótesis se desarrolle sin examen hasta el grado de volverse inerradicable. En todo caso, en materia de teoría, la mejor idea resulta perjudicial aceptándola a ciegas y beneficiosa tras un examen crítico.

2. *Ejemplo matemático.* De todos los cuadriláteros de igual perímetro dado, determinar el de mayor superficie.

¿Cuál es la incógnita? Un cuadrilátero.

¿Cuáles son los datos? El perímetro del cuadrilátero.

¿Cuál es la condición? El cuadrilátero buscado debe tener una superficie superior a la de todo otro cuadrilátero que tenga el mismo perímetro.

Este problema es muy diferente de los problemas usuales de la geometría elemental, y por ello, es natural que tratemos de adivinar en un principio.

¿Qué cuadrilátero será el que tenga realmente la mayor superficie? ¿Cuál sería la hipótesis más simple? Podemos haber oído decir que, de todas las figuras de igual perímetro, la que tiene mayor superficie es el círculo. Podemos incluso sospechar alguna razón que haga plausible esta afirmación. ¿Cuál es el cuadrilátero que más se acerca el círculo? ¿Cuál es el que más se acerca desde el punto de vista de simetría?

Es muy probable que el cuadrado nos venga a la mente. Si consideramos seriamente esta hipótesis, nos tenemos que dar cuenta de su significado y tener el valor de formularla: "De todos los cuadriláteros de perímetro dado, el cuadrado es el de mayor superficie." Si decidimos entonces examinar esta afirmación, la situación cambia. Inicialmente teníamos un "problema por resolver". Después de formular nuestra hipótesis, tenemos un "problema por demostrar", es decir, una proposición que se trata de demostrar o refutar.

Si no conocemos ningún problema similar, resuelto anteriormente, la tarea podrá parecernos difícil. *Si no puede resolver el problema que se le propone, trate de resolver primero un problema relacionado. ¿Podría resolver una parte del problema?* Puede ocurrírsenos que, si el cuadrado es una figura privilegiada entre los cuadriláteros, por esta misma razón también lo será entre los rectángulos. Una parte del problema quedaría resuelta si pudiésemos demostrar el enunciado siguiente: "De todos los rectángulos de perímetro dado, el cuadrado es el de mayor superficie."

Este teorema parece más accesible que el primero; su alcance, claro, está más restringido. No obstante, para comprender su significado, debemos enunciarlo en forma diferente y más detallada. Resulta provechoso enunciarlo en lenguaje algebraico.

La superficie de un rectángulo cuyos lados adyacentes son a y b es igual a ab.

El lado del cuadrado que tiene el mismo perímetro que dicho rectángulo es igual a $\frac{a+b}{2}$. Por lo tanto la superficie de dicho cuadrado será $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Esta debe ser mayor que la del rectángulo, teniéndose por lo tanto

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) > ab$$

¿Es esto cierto? Se puede escribir la misma fórmula bajo la forma equivalente:

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$$

Lo que equivale a

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

o bien

$$(a - b)^2 > 0$$

desigualdad que tenemos por cierta a menos que $a = b$, es decir, a menos que el rectángulo considerado no sea un cuadrado.

No hemos resuelto todavía el problema, pero hemos logrado un cierto adelanto examinando atentamente lo que habíamos sospechado y que nos parecía evidente.

3. *Ejemplo no matemático.* En un crucigrama tenemos que determinar una palabra de siete letras así definida: "Repetir un proceso en ambos sentidos."

¿Cuál es la incógnita? Una palabra.

¿Cuáles son los datos? El largo de la palabra, tiene siete letras.

¿Cuál es la condición? Está dada por la definición, pero en forma bastante vaga.

Debemos, pues, reexaminar dicha definición. La última parte de la frase puede entonces llamarnos la atención: ". . .en ambos sentidos". *¿Podría resolver una parte del problema?* Quizá pudiésemos adivinar el principio de la palabra. Dado que se insiste notablemente en la idea de repetición, es probable que la palabra comience por "re". Es fácil de adivinarse. Si adoptamos este punto de vista, debemos darnos cuenta lo que ello significa. La palabra que se busca tomaría la forma:

R E - - - - -

¿Puede verificar el resultado? Si la primera letra de la palabra que se busca es también la primera letra de otra palabra del crucigrama, dicha palabra debe entonces comenzar por "R". Puede ser conveniente considerar esta última palabra y ver si la R conviene. Si logramos verificar dicha R o, al menos, no encontramos ninguna razón que se oponga a ella, volvemos entonces a nuestra palabra original. Preguntamos de nuevo: *¿Cuál es la condición?* Reexaminando la definición, la última parte puede llamarnos la atención: ". . .en ambos sentidos". ¿No querría decir esto que la palabra se puede leer en los dos sentidos? Esta hipótesis es menos evidente que la primera, sin embargo, hay casos en que se presenta (véase DESCOMPONER Y RECOMPONER EL PROBLEMA, 8; página 78).

De todos modos, examinemos esta hipótesis; consideremos su significado. La palabra tomaría la forma:

R E - - - E R

Por otra parte, la tercera letra debe ser la misma que la quinta, siendo muy probable que dicha letra sea una consonante, mientras que la cuarta o la de enmedio es una vocal.

El lector puede ahora fácilmente, por sí mismo, encontrar la palabra en cuestión. Si no lo logra, puede seleccionar las vocales, una tras otra, para la letra de enmedio.

Figuras. Las figuras no se reservan al uso exclusivo de los problemas de geometría. Una figura puede ayudar considerablemente en todo tipo de problemas que nada tienen de geométrico. Tenemos, pues, buenas razones para que consideremos el papel que juegan las figuras en la solución de los problemas.

1. Si el problema es de geometría, tenemos que estudiar una figura. Dicha figura podemos imaginarla o representarla sobre el papel. En ciertos casos puede ser preferible imaginar la figura sin dibujarla, pero si tenemos que examinar detalles diferentes, uno tras otro, es preferible *dibujar una figura.* En efecto, si los detalles son numerosos, no se pueden imaginar todos simultáneamente, pero se encuentran todos sobre el papel. Se puede olvidar un detalle imaginado; pero si se ha representado sobre el papel, permanece allí y cuando regresemos a él, nos recordará las observaciones anteriores, lo que nos ahorrará, en cierta medida, el trabajo de tenerlo que recordar.

2. Consideremos ahora más detenidamente el empleo de figuras en problemas de construcción geométrica.

Empezamos el estudio detallado de un problema de ese tipo trazando una figura que comprende la incógnita y los datos, reuniendo estos diversos elementos en la forma requerida por la condición del problema. A fin de comprender bien el problema, tenemos que considerar por separado cada uno de los datos y cada una de las partes de la condición; juntaremos después todas las partes y consideraremos la condición como un todo, tratando de ver simultáneamente las diversas relaciones requeridas por el problema. Es evidente que no podríamos manejar, separar y combinar todos estos detalles sin una figura trazada en el papel.

Por otra parte, antes de haber resuelto definitivamente el problema, no se puede saber si es posible el trazo de una figura. ¿Es posible satisfacer por completo la condición impuesta por el problema? No podemos afirmarlo antes de obtener la solución definitiva; no obstante, empezamos aceptando una figura en la cual la incógnita está en relación con los datos según lo prescrito por la condición. Se podría entonces creer que, al trazar la figura, hemos hecho una hipótesis gratuita.

No es el caso, o al menos no necesariamente. No obramos incorrectamente cuando, examinando el problema, consideramos la *posibilidad* de

que exista un objeto que satisfaga la condición impuesta a la incógnita y que se mantenga con los datos en la relación requerida, con tal que no confundamos la posibilidad con la certidumbre. Un juez no obra de forma incorrecta cuando, en el curso del interrogatorio a un acusado, considera la hipótesis de culpabilidad, pero a condición de que no atribuya a dicha hipótesis un valor definitivo. El matemático, como el juez, puede examinar una posibilidad, sin prejuicio alguno, difiriendo su fallo hasta el momento en que el examen le haya dado un resultado definitivo.

El método que consiste en empezar el estudio de un problema de geometría trazando una figura en la cual, por hipótesis, la condición se satisface, se remonta a los geómetras griegos. Esto insinúa la breve frase un tanto enigmática de Pappus: *"Admítase que lo que se pide hacer se ha hecho ya."* La recomendación siguiente es un poco menos concisa, pero más clara: *Dibuje una figura hipotética suponiendo la condición del problema totalmente satisfecha.*

Esta recomendación se aplica a los problemas de construcción geométrica, pero no hay motivo alguno de limitarla a este tipo particular de problemas. Podemos hacerla extensiva a todos los "problemas por resolver", exponiéndola bajo la siguiente forma general: *Examine la situación hipotética en la cual la condición del problema se supone totalmente satisfecha.*

Compárese con PAPPUS, 6; página 136.

3. Estudiemos ahora algunos puntos que conciernen el dibujo práctico de figuras.

I) ¿Conviene trazar figuras de un modo exacto o aproximado, con o sin instrumentos?

Cada forma tiene sus ventajas. Las figuras exactas juegan por principio, en geometría, el mismo papel que las mediciones exactas en física, pero en la práctica tienen menos importancia que éstas, ya que los teoremas de geometría se verifican de un modo más extenso que las leyes de la física. Sin embargo, los principiantes deben construir un gran número de figuras tan exactas como les sea posible, a fin de adquirir una buena base experimental; en cuanto a los demás, una figura exacta puede igualmente sugerirles un teorema geométrico. No obstante, en lo que concierne al razonamiento propiamente dicho, basta en general trazar cuidadosamente las figuras a mano alzada, siendo este procedimiento más expedito. Claro está, una figura no debe parecer absurda; las líneas supuestas rectas no deben serpentear y lo que quiere ser un círculo no debe parecer una patata.

Sucede que una figura inexacta sugiere una conclusión errónea, pero el peligro no es grande y podemos subsanarlo de diferentes modos, en especial, modificando la figura. El peligro será nulo si nos concentramos en las relaciones lógicas y asumimos que la figura no es más que una

ayuda, que no constituye la base de nuestras conclusiones; son las relaciones lógicas las que constituyen la base real. [Este punto se ilustra en forma interesante en ciertas paradojas muy conocidas que explotan inteligentemente la inexactitud intencional de la figura.]

II) Es importante que los elementos se agrupen según las relaciones requeridas, pero no importa el orden en el que son construidos. Escójase en consecuencia el orden más práctico. Si, por ejemplo, para ilustrar la idea de la trisección, usted quiere construir dos ángulos α y β tales que $\alpha = 3\beta$, partiendo de un α cualquiera, usted no podrá construir β con regla y compás; pero si comienza por un β cualquiera, bastante pequeño, entonces no tendrá ninguna dificultad en la construcción de α.

III) La figura no debe sugerir ninguna particularidad gratuita; sus diferentes partes no deben mostrar ninguna relación que no sea requerida por el problema. Así, por ejemplo, las líneas no deben parecer iguales o perpendiculares entre sí cuando el problema no lo requiere; los triángulos no deben parecer isósceles o rectángulos si dicha propiedad no la exige el problema. El triángulo cuyos ángulos miden 45°, 60° y 75° es el que, en el sentido preciso del término, está más "alejado" de la forma del triángulo isósceles o rectángulo.* Este triángulo o uno parecido es el que conviene trazar siempre que se quiera considerar un triángulo "cualquiera".

IV) A fin de acentuar los diversos papeles que juegan diferentes líneas en una figura, se pueden trazar líneas de trazo grueso o delgado, continuo o discontinuo (punteado), o incluso se pueden emplear diferentes colores. Se trazará una línea de un trazo muy tenue si no se está todavía decidido por entero a emplearla como línea auxiliar. Se pueden representar en rojo los elementos dados y emplear otros colores para hacer resaltar las partes importantes, como por ejemplo dos triángulos semejantes, etc.

V) Para ilustrar los problemas de geometría del espacio, ¿deben emplearse modelos de tres dimensiones o dibujos sobre el papel o el pizarrón?

Los modelos tridimensionales son deseables, pero incómodos de hacer y costosos de adquirir. Así pues, en general hay que conformarse con dibujos, pese a la dificultad de visualizarlos. Es muy conveniente que los principiantes hagan algunos experimentos con la ayuda de modelos de cartón, hechos por ellos mismos. Se pueden también emplear objetos usua-

* Si los ángulos de un triángulo son α, β y γ y se tiene $90° > \alpha > \beta > \gamma$, entonces una al menos de las diferencias $90° - \alpha$, $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$ es $< 15°$ a menos que se tenga:

$$\alpha = 75° \qquad \beta = 60° \qquad \gamma = 45°$$

En efecto,

$$\frac{3(90° - \alpha) + 2(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)}{6} = 15°$$

les para ilustrar nociones geométricas. Así por ejemplo, una caja, un ladrillo, el salón de clase pueden representar un paralelepípedo rectangular, un lápiz puede representar un cilindro, una pantalla un tronco de cono, etc.

4. Las figuras trazadas sobre el papel son fáciles de hacer, fáciles de reconocer y fáciles de recordar. Las figuras de la geometría plana nos son particularmente familiares y los problemas que las conciernen especialmente accesibles. Podemos sacar algún provecho de esta circunstancia cuando tenemos que ocuparnos de objetos no geométricos si logramos encontrarles alguna representación geométrica apropiada.

De hecho, las representaciones geométricas tales como gráficas y diagramas de todo tipo, se utilizan en todas las ciencias, no solamente en física, química o ciencias naturales, sino también en economía e incluso en psicología. Utilizando una representación geométrica apropiada, tratamos de expresarlo todo en el lenguaje de las figuras, de reducir todo tipo de problemas a problemas de geometría.

Así pues, incluso si el problema no es geométrico, usted puede tratar de *dibujar una figura.* Encontrar una representación geométrica clara a un problema no geométrico puede permitir un avance sensible hacia la solución.

El **futuro matemático** debe saber evidentemente resolver los problemas con facilidad; pero ello no es suficiente. Hace falta también que pueda, dado el caso, resolver problemas matemáticos importantes. Es por ello que deberá, ante todo, descubrir para qué género de problemas está naturalmente dotado.

La parte más importante de su trabajo consistirá en reconsiderar, en conjunto, la solución completa del problema. Estudiando la evolución de su trabajo y la forma final de la solución, puede encontrar una variedad infinita de puntos a observar. Puede meditar acerca de la dificultad del problema y de la idea fundamental de la solución. Puede tratar de ver lo que le ha impedido y lo que finalmente le ha ayudado a resolver el problema. Puede buscar intuiciones simples como: *¿Podría haberse obtenido el resultado de inmediato?* Puede comparar y desarrollar diversos métodos: *¿Puede deducirse el resultado en forma diferente?* Tratará de esclarecer el problema comparándolo con otros resueltos anteriormente. Tratará de inventar nuevos problemas que puede resolver basándose en el trabajo recién hecho. *¿Puede utilizar el resultado, o el método, en algún otro problema?* Asimilando el problema que acaba de resolver, adquirirá conocimientos bien ordenados, que podrá utilizar en cualquier momento.

El futuro matemático aprende, como todo el mundo, por medio de la imitación y de la práctica. Buscará el correcto modelo a imitar. Observará a un profesor que le estimule. Puede competir con un amigo capaz. Luego, y es quizá lo más importante, leerá no solamente libros de texto usuales, sino también buenos autores, hasta que encuentre uno cuyo estilo esté inclinado a imitar. Le gustará y buscará lo que le parece simple, instructivo o bello. Resolverá problemas, eligirá aquellos que responden a su cuerda, meditará acerca de su solución e inventará nuevos problemas. Por estos y otros medios debe intentar hacer su primer descubrimiento importante por sí mismo: debe descubrir sus gustos y aversiones, sus preferencias, su propia línea.

Generalización. La generalización consiste en pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado.

1. Si por casualidad encontramos la suma

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

podemos observar que puede expresarse bajo la forma curiosa

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Es natural entonces plantearse la pregunta: ¿Sucede con frecuencia que la suma de cubos sucesivos, tales como

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

sea un cuadrado? Haciendo tal pregunta, estamos generalizando. Dicha generalización es acertada, pues conduce de una observación particular a una ley general notable. Muchos resultados se han obtenido en matemáticas, física y ciencias naturales gracias a generalizaciones de este tipo. Véase INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, página 114.

2. La generalización puede ser útil en la solución de ciertos problemas. Consideremos el siguiente de geometría del espacio: "Una recta y un octaedro regular están en una posición relativa dada. Determinar un plano que pase por la recta y corte al volumen en dos partes iguales." Este problema puede parecer difícil, pero de hecho, una pequeña familiaridad con la forma del octaedro regular es suficiente para que venga a la mente el siguiente problema, más general: "Una recta y un *sólido con centro de simetría* están en una posición relativa dada. Determinar un plano que pase por la recta y que corte al sólido en dos partes iguales." El plano requerido pasa, naturalmente, por el centro de simetría del sólido; está determinado por el punto y la recta dada. Como el octaedro tiene también un centro de simetría el problema original queda igualmente resuelto.

El lector no debe dejar de observar que el segundo problema, más general que el primero es, sin embargo, mucho más fácil. De hecho, el medio principal del que nos hemos valido para resolver el primer problema ha sido *inventar el segundo.* Inventando el segundo problema, reconoce-

mos el papel que juega el centro de simetría; hacemos *resaltar* la propiedad esencial del octaedro con relación al problema que se nos proponía, a saber, que tiene un centro de simetría.

Sucede a veces que el problema más general es fácil de resolver. Esto puede parecer paradójico, pero el ejemplo precedente prueba que ello no tiene nada de excepcional. Inventando el problema general, hemos vencido la principal dificultad que ofrecía el problema particular. Después de esta invención lo que queda por hacer es la parte menos importante del trabajo. Así, en el presente caso, la solución del problema general no es más que una parte, la menos importante, de la del problema particular. Véase PARADOJA DEL INVENTOR, página 138.

3. "Determinar el volumen de una pirámide truncada de base cuadrada, sabiendo que el lado de la base inferior es de 10 cm, el de la base superior de 5 cm y la altura del tronco de pirámide, de 6 cm." Sustituyendo los números 10, 5 y 6 por letras tales como a, b, h, generalizamos. Obtenemos un problema más general que el primero, que podemos enunciar como sigue: "Determinar el volumen de una pirámide truncada, sabiendo que el lado de la base inferior es a, el de la base superior b, y que la altura del tronco de pirámide es h." Este tipo de generalización puede ser muy útil. Pasando de un problema "numérico" a un problema "literal", ganamos acceso a nuevos procedimientos; podemos variar los datos y, haciendo esto, podemos verificar los resultados de diversos modos. Véase ¿PUEDE COMPROBAR EL RESULTADO?, 2; VARIACIÓN DE PROBLEMA, 4.

¿Ha empleado usted todos los datos? Nuestros conocimientos se movilizan por decirlo así progresivamente; nuestra concepción de un problema será, pues, mucho más rica al final de nuestra investigación que al principio (PROGRESO Y LOGRO, 1). Pero, ¿cómo es ahora dicha concepción? ¿Tenemos todo lo que nos hace falta?; ¿es adecuada?; *¿ha empleado usted todos los datos?; ¿ha utilizado por completo la condición?* La pregunta correspondiente en el caso de "problemas por demostrar" es: *¿Ha utilizado por completo la hipótesis?*

1. A modo de ilustración, volvamos al "problema del paralelepípedo" de la sección **8** (reconsiderando en las secciones **10, 12, 14** y **15**). Puede suceder que un alumno, después de encontrar fácilmente la idea de calcular la diagonal de una cara, $\sqrt{a^2 + b^2}$, se detenga ahí. El profesor podrá entonces ayudarle preguntándole: *"¿Ha empleado usted todos los datos?"* El alumno no puede dejar de observar que la fórmula $\sqrt{a^2 + b^2}$ no contiene el tercer dato c. Deberá entonces tratar de hacer entrar en juego a c. Así se presentará la posibilidad de observar el triángulo rectángulo, que juega un papel decisivo, cuyos lados son $\sqrt{a^2 + b^2}$ y c, y cuya hipotenusa es la diagonal del paralelepípedo que se busca. (Para otro ejemplo véase ELEMENTOS AUXILIARES, 3; página 83.)

Las preguntas que tratamos aquí son de una importancia capital. El ejemplo precedente muestra claramente el papel que desempeñan en la construcción de la solución. Pueden ayudarnos a encontrar el punto débil de nuestra concepción del problema. Pueden descubrirnos el elemento que nos falta. En efecto, cuando constatamos la ausencia de un elemento indispensable, es natural que tratemos de hacerlo entrar en juego. Disponemos así de una llave, de una línea de conducta definida a seguir, que con frecuencia nos llevará a la idea decisiva.

2. Las preguntas que estudiamos constituyen una ayuda no solamente en la construcción de un razonamiento, sino también para su verificación. Para ser más concretos, supongamos que tenemos que verificar la demostración de un teorema cuya hipótesis comprende tres partes, esenciales las tres para la exactitud del teorema. Es decir, que si se descarta una de las partes de la hipótesis, el teorema deja de ser cierto y, por consiguiente, su demostración errónea. *¿Se emplea en la demostración la hipótesis completa?;* ¿se emplea en ella la primera parte de la hipótesis?; ¿dónde se emplea?; ¿se emplea la segunda parte? ¿la tercera? Respondiendo a estas preguntas nos aseguramos de la exactitud de la demostración.

Este tipo de discusión es eficaz, instructivo y casi indispensable para una perfecta comprensión de la demostración cuando la argumentación es larga y complicada, tal como lo debe saber el LECTOR INTELIGENTE.

3. La finalidad de las preguntas que hemos tratado es la de examinar si nuestra concepción del problema es completa. No lo será con toda seguridad si olvidamos el considerar un dato esencial, una condición de la hipótesis. Tampoco lo será si no captamos el significado exacto de alguno de los términos esenciales. Así pues, para examinar nuestra concepción del problema, nos debemos plantear la siguiente pregunta: *"¿Ha tenido en cuenta todas las nociones esenciales que comporta el problema?"* Véase DEFINICIÓN, 7; página 72.

4. Las observaciones precedentes, sin embargo, están sujetas a cierta cautela y a ciertas limitaciones. De hecho, no se pueden aplicar directamente sino a los problemas "bien planteados" y "razonables".

Un "problema por resolver" bien planteado y razonable debe tener todos los datos necesarios sin que ninguno sea superfluo; la condición debe ser suficiente sin ser ni contradictoria ni redundante. Al resolver un problema de este tipo, debemos emplear naturalmente todos los datos y la condición completa.

El objeto de un "problema por demostrar" es un teorema matemático. Si tal problema está bien planteado y es razonable, cada cláusula de la

hipótesis del teorema debe ser esencial a su conclusión. Al demostrar un teorema de este tipo, debemos emplear naturalmente todas las cláusulas de la hipótesis.

Los problemas matemáticos propuestos en los libros de texto deben ser, o al menos deberían serlo, razonables. Sin embargo, no debemos descuidar el espíritu de crítica; cuando se plantea la más ligera duda, debemos preguntarnos: ¿ES POSIBLE SATISFACER LA CONDICIÓN? Al tratar de responder a esta pregunta o a una similar, debemos asegurarnos, en la medida de lo posible, de que nuestro problema ha sido tan bien planteado como se supone que lo debe ser.

La pregunta que constituye el título del presente artículo y las preguntas del mismo tipo no deben plantearse bajo dicha forma más que en los casos en que, a nuestro conocimiento, el problema propuesto es razonable y expuesto de un modo perfecto, o al menos cuando no tenemos ninguna razón de suponer lo contrario.

5. Ciertos problemas no matemáticos pueden estar, en cierto sentido, "bien planteados". Así por ejemplo, se supone que los problemas de ajedrez serios tienen una sola solución sin que aparezca en el tablero ninguna pieza superflua.

Sin embargo, en general, los PROBLEMAS PRÁCTICOS están lejos de responder a esta perfección y conviene entonces reconsiderar a fondo las preguntas tratadas en este artículo.

He aquí un problema relacionado con el suyo y que usted ha resuelto ya. He aquí una buena noticia; un problema del cual conocemos la solución y que tiene relaciones con el problema propuesto es con toda seguridad bienvenido. Y lo será tanto más en la medida que la relación sea más estrecha y la solución más simple. Son muchas las posibilidades para que tal problema nos ayude a resolver el que nos interesa.

La situación que aquí examinamos es característica e importante. A fin de verla claramente, comparémosla a la situación en que nos encontramos cuando trabajamos en un problema auxiliar. En ambos casos, para resolver un cierto problema A, introducimos y examinamos otro problema B, con la esperanza de poder sacar algún provecho para la solución del problema propuesto A de la consideración del otro problema B. La diferencia está en nuestra relación con B. Aquí hemos logrado recordar un antiguo problema B, del cual conocemos la solución, pero sin saber todavía cómo emplearla. Ahí hemos inventado un nuevo problema B; sabemos (o al menos entrevemos) el modo de utilizar B, pero sin saber todavía cómo resolverlo. La dificultad que B representa para nosotros determina la diferencia entre las dos situaciones. Una vez remontada esta dificultad, podemos emplear B de la misma manera en los dos casos, es decir, utilizar ya sea el resultado o el método (como se ha explicado en PROBLEMA AUXILIAR, 3) o incluso, con un poco de suerte, podemos emplear los dos a la vez. En la situación considerada aquí, conocemos la solución de B, pero sin saber todavía cómo emplearla. Así pues, nos planteamos las siguientes preguntas: *¿Puede usted utilizarlo?; ¿puede emplear su resultado?; ¿puede utilizar su método?*

La intención de utilizar un cierto problema ya resuelto influye sobre nuestra concepción del problema actual. Buscando establecer un lazo de unión entre ellos, introducimos en el nuevo problema elementos correspondientes a ciertos elementos importantes del antiguo problema. Por ejemplo, si nuestro problema consiste en determinar la esfera circunscrita alrededor de un tetraedro dado —lo que constituye un problema de geometría del espacio— podemos valernos de un problema análogo, ya resuelto, de geometría plana, que consiste en determinar el círculo circunscrito alrededor de un triángulo dado. Recordamos ahora que, para este último problema, nos valimos de las mediatrices de los lados del triángulo. Parece, pues, indicado tratar de introducir aquí algún elemento análogo. Ello nos lleva así a la elección, como elementos auxiliares correspondientes, de los planos perpendiculares en los puntos medios de las aristas del tetraedro. Gracias a esta idea, nos es entonces fácil encontrar la solución del problema de geometría en el espacio, siguiendo la analogía que presenta con la del problema de geometría plana del que nos hemos acordado.

Este ejemplo es típico. La consideración de un problema relativo al nuestro y ya resuelto, nos lleva a introducir elementos auxiliares, y esta introducción de elementos apropiados nos permite deducir del problema relativo el máximo provecho para la solución del problema inicial. Tal es el resultado que buscábamos cuando, pensando en la utilidad posible de un problema ya resuelto, nos preguntábamos: *¿Debe introducir ciertos elementos auxiliares que le permitan hacer uso de él?*

He aquí un teorema ya demostrado relativo al suyo. Esta versión de la observación que tratamos aquí se ilustra en la sección 19.

Heurística o heurética, o "ars inveniendi", tal era el nombre de una ciencia bastante mal definida y que se relacionaba tan pronto a la lógica, como a la filosofía o a la psicología. Se exponían con frecuencia las líneas generales, pero rara vez sus detalles. En nuestros días está prácticamente olvidada. Tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos del descubrimiento y de la invención. Se pueden encontrar algunas trazas de este estudio entre los comentadores de Euclides; un párrafo de PAPPUS es particularmente interesante sobre este tema. Los ensayos más conocidos sobre la construcción de un sistema heurístico son debidos a DESCARTES y LEIBNIZ, ambos filósofos y matemáticos célebres. Igualmente debemos a Bernard BOLZANO una exposición sobre heurística detallada y notable. La

presente obra trata de revivir la heurística bajo una forma moderna y desde luego modesta. Véase HEURÍSTICA MODERNA.

Heurística, como adjetivo, significa "servicio al investigador".

Heurística moderna. La heurística moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular *las operaciones mentales típicamente útiles* en este proceso. Son diversas sus fuentes de información y no se debe descuidar ninguna. Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico, como psicológico; no deben descuidarse las aportaciones al tema hechas por autores tales como Pappus, Descartes, Leibniz y Bolzano, pero debe apegarse más a la experiencia objetiva. Una experiencia que resulta a la vez de la solución de problemas y de la observación de los métodos del prójimo, constituye la base sobre la cual se construye la heurística. En este estudio buscaremos, sin descuidar ningún tipo de problema, los puntos comunes de las diversas formas de tratar cada uno de ellos y después trataremos de determinar las características generales independientes del tema del problema. Un tal estudio tiene objetivos "prácticos"; una mejor comprensión de las operaciones mentales típicamente útiles en la solución de un problema puede en efecto influir favorablemente en los métodos de la enseñanza, en particular en lo que se refiere a las matemáticas.

La presente obra presenta el primer intento de realizar este programa. Examinemos, pues, cómo los diversos artículos de nuestro diccionario pueden contribuir a tal resultado.

1. Nuestra lista constituye en suma una enumeración de las operaciones mentales típicamente útiles para resolver problemas; a dichas operaciones se hace alusión por medio de las preguntas y sugerencias que se presentan. Algunas de ellas se describen de nuevo en la Segunda Parte, otras, ilustradas mediante ejemplos, se consideran más a fondo en la Primera Parte.

Si se desea una información más completa sobre alguna de las preguntas o sugerencias, el lector deberá remitirse a los artículos del Diccionario que llevan por títulos las primeras frases de los quince párrafos de dicha lista: ¿CUÁL ES LA INCÓGNITA? ¿ES POSIBLE SATISFACER LA CONDICIÓN? DIBUJE UNA FIGURA... ¿PUEDE UTILIZAR EL RESULTADO? Para detalles particulares sobre los que se quiera profundizar, el lector podrá referirse a las primeras palabras del párrafo donde aparece este detalle y después encontrar el artículo del Diccionario cuyo título lo constituyen esas palabras. Por ejemplo, la sugerencia *Refiérase a las definiciones* figura en el párrafo de la lista cuya primera frase es: ¿PODRÍA ENUNCIAR EL PROBLEMA EN FORMA DIFERENTE? Bajo este título se encuentra una referencia al artículo DEFINICIÓN que explica e ilustra la sugerencia en cuestión.

2. El método que conduce a la solución de problemas es complejo y presenta diferentes aspectos. Los doce artículos principales del Diccionario estudian ampliamente algunos; mencionaremos los títulos en los párrafos que siguen.

Cuando trabajamos con ahinco somos muy sensibles al progreso de nuestro trabajo: estamos contentos cuando es rápido, deprimidos cuando es lento. ¿Qué es esencial para PROGRESAR Y ALCANZAR EL LOGRO cuando resolvemos problemas? El artículo que trata de esta cuestión se cita con frecuencia en el Diccionario y conviene leerlo de inmediato.

Al tratar de resolver un problema, consideramos sucesivamente sus diversos aspectos, les damos vueltas sin cesar en la mente; una VARIACIÓN DEL PROBLEMA es esencial en nuestro trabajo .Podemos variarlo DESCOMPONIENDO Y RECOMPONIENDO sus elementos, refiriéndonos a la DEFINICIÓN de algunos de sus términos; podemos también utilizar los recursos que ofrece la GENERALIZACIÓN, PARTICULARIZACIÓN y ANALOGÍA. Una variación del problema puede llevarnos a ELEMENTOS AUXILIARES o al descubrimiento de un PROBLEMA AUXILIAR más accesible.

Tenemos que distinguir cuidadosamente entre PROBLEMAS POR RESOLVER y PROBLEMAS POR DEMOSTRAR. Dado que nuestra lista está especialmente adaptada a los primeros, convendrá revisarla, modificar algunas de sus preguntas y sugerencias a fin de poder aplicarlas del mismo modo a los segundos.

En todo tipo de problemas, pero sobre todo en los matemáticos que ofrecen dificultad, es siempre útil y a menudo indispensable, el emplear una NOTACIÓN apropiada, al igual que FIGURAS geométricas.

3. El método que conduce a la solución de problemas se presenta bajo muchos aspectos, algunos de los cuales no han sido tratados en esta obra y otros lo han sido muy brevemente. Hemos estimado en efecto que, en una primera exposición rápida, no había lugar para el estudio de puntos muy sutiles, demasiado técnicos o muy controvertidos.

Un RAZONAMIENTO HEURÍSTICO provisional, tan sólo plausible, tiene un valor importante en el descubrimiento de la solución, pero no debe admitirse como una demostración; incumbe a cada uno adivinar, pero también EXAMINAR LAS HIPÓTESIS. La naturaleza del razonamiento heurístico se trata en INDICIOS DE PROGRESO, pero la discusión se podría ahondar.

Es importante para nuestro tema el examinar ciertos modelos lógicos, pero nos ha parecido preferible no introducir ningún artículo técnico. Dos artículos solamente se dedican predominantemente a aspectos psicológicos: DETERMINACIÓN, ESPERANZA, ÉXITOS y TRABAJO SUBCONSCIENTE. Se encontrará también una observación incidental sobre la psicología animal. Véase RAZONAMIENTO REGRESIVO, página 174.

Hemos subrayado el hecho de que los problemas de todo tipo, en particular los PROBLEMAS PRÁCTICOS, e incluso los ENIGMAS, pertenecen al dominio de la heurística. Igualmente insistimos sobre el hecho de que ningún estudio serio podrá admitir las REGLAS DEL DESCUBRIMIENTO como infalibles.

La heurística trata del comportamiento humano frente a los problemas; este estudio se remonta, al parecer, a los primeros tiempos de la sociedad y la quintaesencia de estas discusiones antiguas se conserva en la SABIDURÍA DE LOS PROVERBIOS.

4. Hemos introducido en nuestra obra algunos artículos sobre cuestiones de detalle y hemos tratado con largueza otros sobre cuestiones generales en la medida que podían, en su totalidad o en parte, presentar cierto interés a los alumnos o a los profesores.

Ciertos artículos tratan cuestiones de método con frecuencia importantes en matemáticas elementales, así como PAPPUS, RAZONAMIENTO REGRESIVO (ya citado en el núm. 3), REDUCCIÓN AL ABSURDO Y DEMOSTRACIÓN INDIRECTA, INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, PLANTEO DE LA ECUACIÓN, EXAMEN DE DIMENSIONES y ¿POR QUÉ LAS DEMOSTRACIONES? Algunos artículos van dirigidos particularmente a los profesores, por ejemplo, PROBLEMA DE RUTINA y DIAGNÓSTICO, otros a alumnos por encima del término medio como el AFICIONADO A RESOLVER PROBLEMAS, el LECTOR INTELIGENTE y el FUTURO MATEMÁTICO.

Mencionemos aquí que los diálogos entre profesor y alumno, que aparecen en las secciones **8, 10, 18, 19, 20,** y en diversos artículos del diccionario, pueden servir de modelos no solamente al profesor que trata de guiar su clase, sino también a todos aquellos que trabajan solos en la solución de problemas. Describir el pensamiento como un "discurso mental", como una especie de conversación del individuo consigo mismo, no es un error. Los diálogos en cuestión muestran los progresos de la solución; aquel que intenta resolver un problema hablando consigo mismo puede progresar siguiendo un curso similar.

5. No vamos a enumerar los títulos restantes; sólo mencionaremos algunos agrupándolos según el tema.

Ciertos artículos contienen observaciones sobre la historia del tema de nuestra obra, sobre DESCARTES, LEIBNIZ, BOLZANO, sobre HEURÍSTICA, sobre TÉRMINOS ANTIGUOS Y NUEVOS y sobre PAPPUS (este último ya citado en el párrafo 4).

Algunos artículos explican términos técnicos: CONDICIÓN, COROLARIO, LEMA.

Otros artículos sólo hacen referencia a otro (indicados por un asterisco * en el Indice).

6. La heurística tiende a la generalidad, al estudio de métodos, independientes de la cuestión tratada y se aplica a problemas de todo tipo. La presente exposición, sin embargo, presenta como ejemplos problemas de matemáticas elementales, lo que impone ciertos límites a nuestro estudio. Esperamos que dichos límites no desviarán seriamente su orientación general. En efecto, los problemas de matemáticas elementales presentan toda la variedad deseable y las investigaciones sobre el modo de resolverlos son particularmente accesibles e interesantes. Además, los problemas no matemáticos, pese a lo poco citados, no se han descartado por completo. En cuanto a los problemas matemáticos más avanzados, sin citarse nunca de un modo directo, constituyen el verdadero fondo de la presente obra. El matemático experto que se interese en este tipo de estudio puede fácilmente completar nuestro trabajo por medio de ejemplos obtenidos de su propia experiencia si quiere estudiar más de cerca los puntos ilustrados aquí por medio de ejemplos elementales.

7. El autor desea asentar aquí la deuda contraída con algunos autores modernos de los que no se hace mención en el artículo presente y expresar su agradecimiento. Ellos son el físico y filósofo Ernst Mach, el matemático Jacques Hadamard, los psicólogos William James y Wolfgang Kohler. Nos complace igualmente el citar los nombres del psicólogo K. Duncker y del matemático F. Krauss, cuya obra (publicada cuando la nuestra estaba ya avanzada y en parte publicada) presenta ciertas observaciones paralelas a las nuestras.

Indicios de progreso. Cuando Colón y sus compañeros navegaban hacia el oeste sobre un océano desconocido, se sentían reconfortados al divisar pájaros. En efecto, éstos les representaban un indicio favorable de la proximidad de tierra. Ello fue causa de repetidas decepciones. Vigilaban también otras señales. Creían que ciertas corrientes de agua, algunas condensaciones de nubes bajas serían indicios de tierra, pero nuevamente se desengañaron. Un día, sin embargo, los indicios se multiplicaron. El jueves 11 de octubre de 1492, los de *La Pinta* recogieron del mar "una caña y un palo y tomaron otro palillo labrado, a lo que parecía, con hierro, y un pedazo de caña y otra yerba que nace en tierra y una tablilla. La tripulación de *La Niña* también percibió tierra cercana al recoger una rama de baya, con sus frutos. Con estas señales respiraron y alegráronse todos." * Y de hecho, al día siguiente, tuvieron tierra a la vista, era la primera isla del Nuevo Mundo.

Sea cual sea la importancia de nuestra empresa, sea cual sea el tipo de problema que se nos propone, cuando trabajamos con el deseo de logro,

* Navarrete, vol. I, pág. 19. (*N. del T.*)

esperamos ansiosamente los indicios de progreso como Colón y sus compañeros esperaban los que indicasen la proximidad de tierra. Examinaremos algunos ejemplos que ayudarán a comprender lo que podemos considerar, con razón, como un indicio del acercamiento a la solución.

1. *Ejemplos.* He aquí un problema de ajedrez. Debo dar, en dos jugadas, jaque mate al rey negro. Sobre el tablero se ve un caballo blanco, bastante alejado del rey negro y que parece inútil. ¿Cuál puede ser su utilidad? En principio estoy obligado a dejar esta pregunta sin respuesta. Sin embargo, tras diversos intentos, imagino una nueva jugada y observo que haría entrar en juego dicho caballo blanco aparentemente inútil. Esta observación renueva mis esperanzas y la miro como un indicio favorable: esta jugada puede ser buena. ¿Por qué?

En un problema de ajedrez bien planteado no aparecen piezas inútiles. Debemos, pues, tener en cuenta todas las piezas del juego, *emplear todos los datos.* La correcta solución debe con toda seguridad emplear todas las piezas, incluso ese caballo blanco. En este último aspecto la nueva jugada que estoy estudiando concuerda con la jugada correcta que tengo que encontrar. Parece ser la jugada correcta; podría ser esta jugada.

Es interesante considerar una situación similar en un problema de matemáticas. Supongamos que tenemos que expresar el área de un triángulo en función de sus tres lados a, b y c. Hemos concebido una especie de plan. Sabemos, más o menos, las relaciones geométricas que tenemos que tener en cuenta y qué tipo de cálculos tenemos que hacer. Sin embargo, no estamos del todo seguros en cuanto a la conveniencia del plan. Si en este momento, al seguir la línea de conducta indicada por el plan, observamos que la cantidad

$$\sqrt{b+c-a}$$

forma parte de la expresión del área buscada, tenemos razón al sentirnos alentados. ¿Por qué?

En efecto, hay que tener en cuenta que la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado, lo que implica una cierta restricción. Las longitudes dadas a, b y c no pueden ser por lo tanto arbitrarias; por ejemplo, $b + c$ debe ser mayor que a. Esto constituye una parte esencial de la condición y debemos *utilizar la condición completa.* Si $b + c$ no es mayor que a, la fórmula que buscamos será entonces forzosamente ilusoria. Por otra parte, la raíz cuadrada antes indicada resulta imaginaria si $b + c - a$ es negativo, es decir, si $b + c$ es menor que a, y así, la raíz cuadrada no representa una cantidad real bajo las circunstancias mismas en que la expresión deseada se torna ilusoria. Así pues, una fórmula en la cual entra dicha raíz cuadrada tiene una propiedad importante en común con la fórmula real del área; podría ser la propia fórmula.

He aquí otro ejemplo. Hace algún tiempo quería demostrar un teorema de geometría del espacio. Sin mayor dificultad encontré una primera observación que me pareció pertinente; tras ello me estanqué. Me faltaba algo para llevar al cabo la demostración. Ese día, cuando abandoné el trabajo, tenía una noción mucho más clara que al principio de lo que debía ser la demostración, el modo en que debía llenarse la laguna; pero no estaba en condiciones de lograrlo. Al día siguiente, tras un buen descanso por la noche, abordé de nuevo la cuestión y no tardé en caer sobre un problema análogo de geometría plana. De pronto tuve la convicción de tener la solución y tenía, creo, una buena razón para estar convencido de ello. ¿Por qué?

En efecto, *la analogía* es una guía de grandes recursos. La solución de un problema de geometría del espacio depende con frecuencia de la de un problema análogo de geometría plana (Véase ANALOGÍA, 3-7). Así, en mi caso, había desde el principio una oportunidad para que la demostración deseada utilizase como lema algún teorema de geometría plana semejante al que vino a mi mente. "Este teorema se parece al lema que necesito, quizá es el lema mismo." Tal fue mi razonamiento.

Si Colón y sus hombres se hubiesen tomado el trabajo de reflexionar, hubiesen razonado de un modo análogo. Sabían, en efecto, el cariz que toma el mar cerca de las costas; sabían que, con más frecuencia que en alta mar, se ven volar pájaros, que hay objetos flotando en las aguas que provienen de las costas. Muchos de entre ellos debían haber hecho estas observaciones en el transcurso de viajes precedentes al acercarse a tierra. La víspera del día memorable en que divisaron la isla de San Salvador, dado que los objetos que flotaban eran cada vez más numerosos, pensaron: "Se diría que nos acercamos a tierra; es posible que nos estemos aproximando a tierra" y "con estas señales respiraron y alegráronse todos".

2. *Carácter heurístico de los indicios de progreso.* Vamos a insistir sobre un punto quizá claro para todos, pero su importancia es tal que debe conocerse perfectamente.

El tipo de razonamiento ilustrado por los ejemplos precedentes merece ser abordado, pese a que no suministre más que una indicación plausible y no una certeza. Vamos a formular de nuevo uno de estos razonamientos, insistiendo con gran lujo de detalles que lo harán un tanto pedante.

Cuando nos acercamos a tierra, vemos con frecuencia pájaros.

Ahora vemos pájaros.

Por lo tanto, probablemente nos acercamos a tierra.

Sin la palabra "probablemente" la conclusión sería completamente falsa. De hecho, Colón y sus compañeros vieron con frecuencia pájaros sin que ello indicase la proximidad de tierra. Se decepcionaron. Sólo una vez sus esperanzas fueron justificadas.

Con la palabra "probablemente" la conclusión es razonable sin ser una demostración concluyente; es sólo una indicación, una sugerencia heurística. Sería un grave error olvidar esta reserva y ver la conclusión como una certeza, pero sería más grave aún el no considerarla en lo absoluto. Si se considera como cierta una conclusión heurística, se corre el riesgo de engañarse y decepcionarse; pero si se descuidan totalmente tales conclusiones, ningún progreso es posible. Los más importantes indicios de progreso son de carácter heurístico. ¿Hay que fiarse de ellos?; ¿hay que seguirlos? Sí, pero bien abiertos los ojos, sin distraer la atención, sin dejar de juzgar.

3. *Indicios propiamente significativos.* Podemos examinar los ejemplos precedentes desde otro punto de vista.

En uno de ellos considerábamos como un indicio favorable el hecho de haber logrado emplear un dato del que no nos habíamos valido todavía (el caballo blanco). Estábamos en lo justo. De hecho, resolver un problema, esencialmente es *encontrar la relación entre los datos y la incógnita.* Además se debe, al menos en los problemas bien planteados, *utilizar todos los datos* y establecer la relación existente entre cada uno de ellos y la incógnita. Por consiguiente, introducir en el problema un dato más es propiamente un progreso, un paso adelante.

En otro ejemplo considerábamos como un indicio favorable el hecho de que la fórmula tenía en cuenta una cláusula esencial de la condición: ahí también estábamos en lo justo. En efecto, debemos *utilizar la condición completa.* Así pues, tener en cuenta otra cláusula de la condición es también —a justo título— considerado como un progreso, un paso en la buena dirección.

En un tercer caso veíamos como indicio favorable el descubrimiento de un problema análogo más simple. Ello se justifica igualmente. Con toda seguridad la analogía es una de las principales fuentes de la invención. En caso de fracaso por otros medios, debemos de tratar de *imaginar un problema análogo.* Si este tipo de problema se presenta espontáneamente, podemos alegrarnos: sentimos que la solución está cerca.

Después de estos ejemplos, será fácil ahora el concebir la idea general. Existen ciertas operaciones mentales típicamente útiles para resolver problemas. Nuestra lista contiene las más útiles. Si tal operación típica lo logra, ya sea que otro dato se ha relacionado a la incógnita, ya sea que otra cláusula de la condición se ha considerado, ya sea que se tenga el recurso de un problema análogo más simple, su éxito debe considerarse como un indicio de progreso. Una vez comprendido este punto esencial, podemos expresar más claramente la naturaleza de otros indicios; nos basta referirnos a la lista y examinar las diversas preguntas y sugerencias desde el nuevo punto de vista adoptado.

Así pues, comprender claramente la naturaleza de la incógnita constituye un progreso. Disponer juiciosamente los diversos datos de modo de poder acordarse fácilmente de todos ellos, puede ser otro. Visualizar con toda nitidez la condición en su conjunto indica también un adelanto importante; y separar la condición en elementos apropiados puede representar un paso decisivo. Cada vez que logremos encontrar un figura fácil de imaginar o una notación fácil de retener, podemos estimar con toda razón que hay progreso. El recuerdo de *un problema que se relaciona al nuestro y que ya hemos resuelto* puede ser un descubrimiento esencial que nos hará progresar en la dirección correcta.

Y así por el estilo. A cada operación mental claramente concebida le corresponde un cierto indicio altamente significativo. Consultada con cuidado, nuestra lista nos indicará igualmente los indicios de progreso.

Ahora bien, como lo hemos dicho en repetidas ocasiones, las preguntas y sugerencias de dicha lista son sencillas, evidentes y provienen del más llano sentido común. Lo mismo se puede decir de los indicios de progreso de los que acabamos de hablar. Para descifrar dichos indicios no se requieren ciencias ocultas, basta simplemente un poco de sentido común y, claro está, cierta experiencia.

4. *Indicios menos evidentes.* Cuando trabajamos intensamente sentimos el ritmo de nuestro adelanto: si es rápido nos alegramos, si lento nos deprimimos. Resentimos claramente estas diferencias pese a no poder distinguir el menor indicio. Humores, sensaciones, aspectos generales de la situación nos indican los posibles progresos. Sin embargo, dichas impresiones no son fáciles de expresar. "Esto me parece bien" o "esto me parece mal" dice la gente sencilla. Las personas más cultivadas se expresan de modo más matizado: "Este es un plan bien equilibrado" o " no, falta algún elemento y ello destruye la armonía." Sin embargo, detrás de estas expresiones simples o alambicadas se disimula un sentimiento evidente que seguimos con confianza y que nos conduce con frecuencia en la dirección correcta. Si esta sensación es violenta y surge de pronto, hablamos de inspiración. En general no se duda de estas inspiraciones, pero sucede a veces que resultan engañosas. De hecho, deberíamos tratar estas sensaciones, estas inspiraciones que nos guían, exactamente como los indicios más significativos considerados antes: fiarse de ellos, pero con los ojos abiertos.

Seguir siempre las inspiraciones —pero dudando un poco.

[¿Cuál es la naturaleza de estos sentimientos que nos guían? ¿Hay algún sentido preciso tras las palabras de matiz estético, tales como "bien equilibrado" o "armonioso"? Estas preguntas pueden ser más especulativas que prácticas, pero hacen un llamado a respuestas que ameritan, quizá, un lugar en esta obra: dado que los indicios de progreso propiamente signi-

ficativos, están ligados al éxito o al fracaso de ciertas operaciones mentales bastante definidas, podemos sospechar que los sentimientos que nos guían, menos fáciles de expresar, pueden estar relacionados del mismo modo a otras actividades mentales, más oscuras, cuya naturaleza es quizá más "psicológica" y menos "lógica".]

5. *Cómo ayudan los indicios.* Tengo un plan. Veo claramente por dónde debo empezar y cuáles serán las primeras etapas. Sin embargo, no veo muy bien la continuación del itinerario, no estoy del todo seguro que mi plan sea bueno y, por lo demás, me queda un largo camino por recorrer. Empiezo, pues, con precaución en la dirección indicada por el plan, manteniéndome a la espectativa de cualquier indicio de progreso. Si estos indicios son raros o están mal definidos, empiezo a dudar. Y si, durante largos intervalos, no distingo ninguno, puedo perder entusiasmo, dar media vuelta y ensayar otro camino. Por el contrario, si los indicios son más frecuentes a medida que adelanto, si se multiplican, mi duda desaparece, mi confianza se acrecienta y avanzo con seguridad cada vez mayor, tal como Colón y sus compañeros poco antes de divisar la isla de San Salvador.

Los indicios pueden guiar nuestros actos. La ausencia de ellos puede advertirnos que estamos en un callejón sin salida y evitarnos una pérdida de tiempo y un esfuerzo vano, en tanto que su presencia nos permite concentrar nuestros esfuerzos sobre el punto esencial.

No obstante, los indicios pueden ser engañosos. En cierta ocasión abandoné el camino que había tomado por falta de indicios, pero alguien después de mí llevó la cosa un poco más lejos y descubrió algo importante —a mi gran pesar y más vivo enfado—; no solamente perseveró más que yo, sino que descifró correctamente un indicio que yo no había observado. Sin embargo, puede suceder también el seguir con todo optimismo un camino tapizado de indicios favorables y de pronto caer en un obstáculo insospechado e insuperable.

Sí, los indicios pueden a veces inducirnos en error, pero las más de las veces nos llevan al camino correcto. Un cazador profesional puede, de vez en cuando, mal interpretar las huellas de la presa que persigue, pero en general no se equivoca; de otro modo no podría vivir de la caza.

Se requiere experiencia para interpretar correctamente los indicios. Algunos de los compañeros de Colón sabían con toda seguridad, por experiencia, el aspecto que toma el mar en la proximidad de tierra y podían, por consiguiente, distinguir los indicios que aparecían al acercarse a ella. Un experto sabe por experiencia cómo se presenta la situación cuando la solución está cerca y podrá, por consiguiente, distinguir los indicios correspondientes. Conoce, es cierto, mayor número de indicios que un profano y los conoce mejor; su principal ventaja reside precisamente en este conocimiento. Un cazador experimentado detecta las huellas de la presa y puede decir si son recientes o no, en tanto que un individuo sin experiencia es incapaz de ver algo en ello.

La ventaja esencial del hombre excepcionalmente dotado puede residir en una especie de sensibilidad mental extraordinaria. Es esta sensibilidad la que le permitirá detectar los indicios más sutiles del progreso y observar la ausencia de ellos, ahí donde otra persona menos dotada sería incapaz de ver la menor diferencia.

[6. *Silogismo heurístico.* En la sección 2 hemos descubierto un modo de razonamiento heurístico que amerita ser examinado más a fondo y recibir una denominación técnica. Comencemos por formular de nuevo dicho razonamiento bajo la forma siguiente:

Cuando nos acercamos a tierra, con frecuencia vemos pájaros.
Ahora vemos pájaros.

Por consiguiente, se torna más factible que nos aproximemos a tierra.

Las dos primeras proposiciones (arriba de la horizontal) pueden llamarse *premisas,* la tercera (bajo la horizontal), *conclusión.* Al conjunto del razonamiento lo podemos llamar *silogismo heurístico.*

Las premisas se formulan aquí bajo la misma forma que en la sección **2**, pero la conclusión se enuncia de modo más cuidadoso: se destaca mejor una circunstancia esencial. Colón y sus hombres suponían desde el principio que navegando hacia el oeste encontrarían finalmente tierra; debían haber atribuido cierta seguridad a esta hipótesis, sin la cual no hubiesen emprendido el viaje. En el transcurso de éste, establecían una relación entre cada incidente, mayor o menor, y la pregunta primordial: "¿Nos acercamos a tierra?" La confianza crecía o decrecía, según los acontecimientos, y la convicción de cada uno variaba en forma más o menos diferente, según su medio y su personalidad. Toda la tensión dramática del viaje se debe a tales fluctuaciones de la confianza.

El silogismo heurístico que hemos presentado suministra una base razonable a dicha variación de grado de confianza. El papel fundamental de ese tipo de razonamiento es permitir dichas variaciones y dicho aspecto se expresa mejor por medio de la actual terminología que en la sección **2.**

El razonamiento sugerido por el ejemplo se puede expresar así:

Si A es cierto, B es igualmente cierto, como sabemos.
Ahora bien, resulta que B es cierto.

Por consiguiente, A resulta más factible.

En forma más breve:

Si *A*, entonces *B*
B cierto

A más factible.

En este enunciado esquemático, la línea horizontal sustituye a las palabras "por consiguiente" y expresa la implicación, la relación esencial entre las premisas y la conclusión.]

[7. *Naturaleza del razonamiento plausible.* En esta pequeña obra tratamos una cuestión filosófica, pero del modo más práctico y menos formal posible, evitando al máximo las expresiones técnicas y rebuscadas; sin embargo, el tema es y sigue siendo filosófico. Concierne a la naturaleza del razonamiento heurístico y, por extensión, a un tipo de razonamiento que, pese a su importancia, no constituye una demostración; lo llamaremos, a falta de un mejor término, razonamiento *plausible.*

Los indicios que convencen al inventor de la bondad de su idea, las indicaciones que nos guían en los quehaceres cotidianos, la evidencia circunstancial del abogado, la evidencia inductiva del científico, la evidencia estadística invocada en los aspectos más diversos —todos estos tipos de evidencias concuerdan en dos puntos esenciales. Primero, no ofrecen la certeza de una demostración rigurosa. Segundo, son útiles en la adquisición de nuevos conocimientos, e incluso indispensables para todos aquellos conocimientos que no sean puramente matemáticos ni lógicos y que no pertenezcan al mundo físico. Podríamos elegir, para denominar el razonamiento que subraya este tipo de evidencia, entre "razonamiento heurístico', "razonamiento inductivo" o (si queremos evitar significados ya existentes) "razonamiento plausible". Es este último término el que adoptaremos.

El silogismo heurístico que hemos enunciado anteriormente puede considerarse como el modelo más simple y más corriente de un razonamiento plausible. Nos recuerda un modelo clásico de razonamiento demostrativo que recibe el nombre de "modus tollens de silogismo hipotético". Mostramos aquí los dos modelos uno enfrente del otro:

Demostrativo	*Heurístico*
Si *A* pues *B*	Si *A* pues *B*
B falso	*B* cierto
A falso	*A* más factible

La comparación de estos dos tipos puede ser instructiva al permitirnos percibir, lo que no es fácil de otro modo, la naturaleza del razonamiento plausible (heurístico o inductivo).

Los dos modelos tienen la primera premisa igual:

Si *A* pues *B*

Difieren en la segunda. Las afirmaciones:

B falso   *B* cierto

pese a ser opuestas tienen una "naturaleza lógica similar", están al mismo "nivel lógico". La diferencia mayor entre ellos aparece después de las premisas. Las conclusiones

A falso   *A* más factible

se sitúan a diferentes niveles lógicos y sus relaciones con sus premisas respectivas son de una naturaleza lógica diferente.

La conclusión del silogismo demostrativo, de igual naturaleza lógica que las premisas, se expresa por completo y está totalmente basada en ellas. Si mi vecino y yo estamos de acuerdo en aceptar las premisas, nuestras opiniones sobre la conclusión no pueden razonablemente diferir, por muy diferentes que sean nuestros gustos o nuestra demás convicciones.

Por el contrario, la conclusión del silogismo heurístico difiere de las premisas en su naturaleza lógica; es más vaga, menos decisiva, expresada de modo no del todo completo. Esta conclusión es comparable a una fuerza, tiene dirección y magnitud. Nos empuja en cierta dirección: *A* resulta *más* factible; y tiene cierta magnitud: *A* puede resultar *mucho más* o *sólo ligeramente más* factible. La conclusión no se expresa de modo completo y no se basa totalmente en las premisas. *La dirección está expresada e implicada en las premisas, la magnitud no.* Para toda persona razonable, las premisas implican que *A* resulta *más* factible (y no menos, con toda seguridad). Sin embargo, mi vecino y yo podemos con toda honestidad no estar de acuerdo sobre el grado de probabilidad atribuible a *A*, dado que nuestros temperamentos, nuestra formación, nuestras razones tácitas pueden ser diferentes.

En el silogismo demostrativo, las premisas constituyen una *base completa,* sobre la cual descansa la conclusión. Si las dos premisas son exactas, la conclusión lo es igualmente. Si obtenemos alguna nueva información que no altere nuestra fe en las premisas, no podrá tampoco alterarla en la conclusión.

En el silogismo heurístico, las premisas no constituyen más que una *parte de la base* sobre la cual descansa la conclusión, la parte completamente expresada, la parte "visible"; queda una parte no expresada, invisible, que la constituye otra cosa, sentimientos inarticulados quizá o razones sin formular.

Un nuevo conocimiento, sin alterar nuestra fe en las premisas, puede influir en nuestra opinión respecto a *A* en el sentido inverso del resultado al que nos había llevado la conclusión. Puede parecer razonable el encontrar *A* bastante plausible, basándose en las premisas de un silogismo heu-

rístico. Mañana, sin embargo, quizá encontremos razones que, sin influir sobre las premisas, hacen a A menos plausible o quizá incluso la refuten. La conclusión puede cambiar o transformarse totalmente, por medio de la alteración de elementos invisibles de la base, en tanto que las premisas, elementos visibles, permanecen inalterables.

Estas observaciones tienen por finalidad el hacer más comprensible el razonamiento heurístico inductivo, en una palabra el razonamiento plausible, el cual no trata de demostrar y cuya naturaleza parece desconcertante y difícil de definir cuando se le mira bajo el ángulo de la demostración lógica pura. Harían falta más ejemplos concretos, sería necesario considerar silogismos heurísticos de otro tipo, examinar el concepto de probabilidad y otros conceptos del mismo orden para completar este pequeño estudio. (Del mismo autor *Mathematics and Plausible Reasoning.*)]

Las razones heurísticas son importantes, pese a que nada demuestran. Importa tener una concepción clara y, sin embargo, detrás de cada razón que hayamos esclarecido se esconden muchas otras que permanecen oscuras y que tienen quizá mayor importancia.

Inducción e inducción matemática. La inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones. Se emplea en todas las ciencias, aun en matemáticas. En cuanto a la inducción matemática no se emplea más que en matemáticas a fin de demostrar un cierto tipo de teoremas. Es bastante molesto que las dos expresiones estén ligadas, ya que entre los dos procedimientos no existe más que un lazo lógico, extremadamente sutil. Existe, sin embargo, un cierto lazo práctico, puesto que a menudo se emplean los dos métodos al mismo tiempo. Ilustraremos ambos a la vez, mediante el mismo ejemplo.

1. Casualmente podemos observar que

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

y, constatando que dichos números son cubos y su suma un cuadrado, podemos presentar esta observación bajo la siguiente forma:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Podemos entonces preguntarnos si sucede con frecuencia que la suma de los cubos de números consecutivos sea un cuadrado.

Planteando esta pregunta nos parecemos al naturalista que, habiendo observado una planta o una formación geológica curiosa, concibe una "cuestión general". Nuestra cuestión general se refiere a la suma de cubos sucesivos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

A ello nos ha guiado el "ejemplo particular" donde $n = 4$.

¿Qué hacer para contestar? Lo que haría el naturalista. Es decir, buscar otros casos particulares. Si $n = 2$ ó 3, el caso es más sencillo todavía; si $n = 5$, llegamos al caso siguiente. Añadamos, para hacer un trabajo completo y uniforme, el caso donde $n = 1$. Presentando juiciosamente estos diversos casos, como un geólogo expondría los especímenes de un mineral cualquiera, obtenemos la siguiente lista:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 = 1^2\\
1 + 8 &= 9 = 3^2\\
1 + 8 + 27 &= 36 = 6^2\\
1 + 8 + 27 + 64 &= 100 = 10^2\\
1 + 8 + 27 + 64 + 125 &= 225 = 15^2
\end{aligned}$$

El hecho de que estas diversas sumas de cubos consecutivos sean cuadrados, difícilmente puede atribuirse al azar. En un caso similar el naturalista no tendría duda alguna sobre la exactitud de la ley general que le han sugerido los casos particulares observados por él; dicha ley general está casi probada por *inducción.* El matemático se expresa con más reserva, aunque en el fondo piense lo mismo. Se limitará a decir que la inducción sugiere tenazmente el siguiente teorema: *"La suma de los n primeros cubos es un cuadrado."*

2. Hemos sido llevados a suponer la existencia de una ley notable y un poco misteriosa. ¿Por qué esas sumas de cubos sucesivos resultan ser cuadrados? Porque de hecho son cuadrados.

¿Qué haría el naturalista en una situación semejante? Seguiría examinando su hipótesis y tendría entonces la posibilidad de elegir entre diversas líneas de conducta, buscar y acumular, por ejemplo, nuevas pruebas experimentales. Si queremos obrar igual, tenemos que examinar los casos siguientes, donde $n = 6, 7 \ldots$ El naturalista puede también reexaminar los hechos que le han llevado a formular su hipótesis; los comparará con cuidado, tratará de entresacar una regularidad más profunda, una nueva analogía. Es el camino que vamos a seguir.

Examinemos de nuevo los casos, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, que hemos dispuesto en la lista. ¿Por qué todas las sumas resultan ser cuadrados?; ¿qué podemos decir de dichos cuadrados? Sus raíces (cuadradas) son 1, 3, 6, 10, 15. ¿Qué podemos decir de dichas raíces?; ¿existe entre ellas una regularidad más honda, una analogía más honda? En todo caso no parecen aumentar en forma muy irregular. ¿Cómo aumentan? La diferencia entre dos términos sucesivos de esta serie aumenta también:

$$3 - 1 = 2, \quad 6 - 3 = 3, \quad 10 - 6 = 4, \quad 15 - 10 = 5$$

Estas diferencias son de una regularidad notable. Constatamos entonces una

analogía sorprendente entre las raíces (cuadradas) de esos cuadrados, una regularidad notable en los números que las expresan:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ 15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

Si esta regularidad es general (y parece difícil constatarlo) el teorema cuya existencia habíamos sospechado reviste una forma más precisa:

Se tiene, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

3. Por inducción hemos obtenido la ley así formulada y la forma como la hemos obtenido nos lleva a una concepción de la inducción un tanto estrecha, imperfecta, pero justa. La inducción trata de descubrir tras la observación, la regularidad y la coherencia; sus instrumentos más visibles son la generalización, la particularización y la analogía. Una tentativa de generalización parte de un esfuerzo para comprender los hechos observados; se basa en la analogía y se verifica en nuevos casos particulares.

Nos abstendremos de ahondar en este tema de gran controversia entre los filósofos. Pero debemos añadir que numerosos resultados matemáticos se han obtenido primero por inducción y solamente después se han demostrado. Las matemáticas presentadas con rigor son una ciencia sistemática, deductiva, pero las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva.

4. En matemáticas, como en las ciencias físicas, podemos emplear la observación y la inducción para descubrir leyes generales; pero existe una diferencia. En las ciencias físicas, en efecto, no hay nada por encima de la observación y de la inducción, mientras que en matemáticas se tiene, además, la demostración rigurosa.

Después de consagrar más o menos tiempo al trabajo puramente experimental, podemos considerar ventajoso cambiar de punto de vista. Precisemos: hemos descubierto un resultado interesante, pero el razonamiento que nos ha llevado a él no es más que plausible, experimental, provisional, heurístico; tratemos de confirmar dicho resultado de un modo definitivo mediante una demostración rigurosa.

Hemos llegado ahora a un "problema de demostración": demostrar la exactitud del resultado enunciado más arriba (ver párrafo 2).

Existe una posible simplificación. En efecto, podemos saber que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

En todo caso esta expresión es fácil de verificar. Tomemos un rectángulo de lados n y $n + 1$ y dividámoslo en dos por medio de una línea quebrada, como lo muestra la figura 14 a que representa el caso para $n = 4$. Cada mitad tiene "forma de escalera", expresándose su superficie por la fórmula $1 + 2 + \ldots + n$; para $n = 4$, el área vale $1 + 2 + 3 + 4$ (ver fig. 14 b). Siendo la superficie total del rectángulo $n(n + 1)$, la superfi-

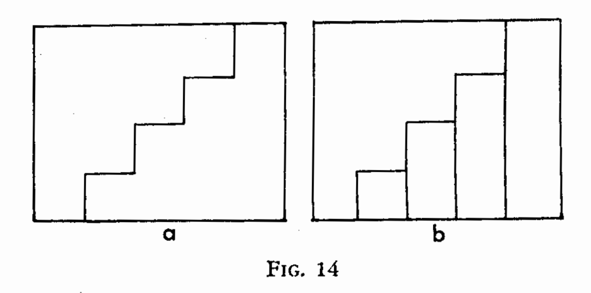


FIG. 14

cie en forma de escalera resulta ser su mitad; lo cual demuestra la exactitud de la fórmula.

Podemos, pues, transformar el resultado obtenido por inducción y expresarlo como sigue:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

5. Si no tenemos la menor idea de la manera como se puede demostrar este resultado, podemos al menos verificarlo. Operemos en principio sobre el primero de los casos que no hemos examinado aún, el de $n = 6$. Para dicho valor la fórmula nos da

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = \left(\frac{6 \times 7}{2}\right)^2$$

lo que resulta exacto efectuados los cálculos, dado que el resultado de ambos miembros es 441.

Podemos llevar más lejos la verificación todavía. La fórmula es, muy probablemente, general, es decir, exacta para todos los valores de n. ¿Seguirá siéndolo cuando pasemos de un valor cualquiera n al valor siguiente $n + 1$? Aplicando la fórmula tal como la hemos dado anteriormente tendríamos que obtener igualmente

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

Existe un método fácil de verificar su exactitud: basta restar de esta última fórmula la precedente, obteniéndose:

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

lo cual es fácil de verificar. El segundo miembro se puede escribir como sigue:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2[(n+2)^2-n^2]=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2[n^2+4n+4-n^2]$$
$$=\frac{(n+1)^2}{4}(4n+4)=(n+1)^2(n+1)=(n+1)^3$$

Así, la fórmula encontrada experimentalmente acaba de pasar con éxito, una prueba importante.

Veamos ahora, en forma precisa, el significado de dicha prueba. Hemos adquirido la certidumbre de que

$$(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

No sabemos todavía si es cierto que

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Pero si supiésemos que ello es cierto, podríamos deducir —añadiendo la ecuación cuya exactitud para nosotros es cierta desde ahora— que es igualmente cierto que

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

lo que es la expresión misma ya obtenida, aparte del número $n+1$ introducido en lugar de n. Por lo demás sabemos que nuestra hipótesis es buena para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. En vista de lo anterior, dicha hipótesis, exacta para $n = 6$, debe serlo igualmente para $n = 7$; exacta para $n = 7$, lo será también para $n = 8$ y así sucesivamente. Siendo, pues, exacta para todo valor de n, lo es de una forma general.

6. La demostración precedente puede servir de modelo para muchos casos similares. ¿Cuáles son los lineamientos principales?

La afirmación por demostrar debe darse de antemano, bajo una forma precisa.

Debe depender de un número entero n.

Debe ser lo suficientemente "explícita" como para permitirnos verificar que permanece cierta cuando pasamos de un número entero n al siguiente entero $n + 1$.

Si hemos logrado verificar ese punto capital de una forma segura, podemos entonces emplear la experiencia que esta verificación nos aporta para concluir que la afirmación siendo verdadera para n, debe serlo también para $n + 1$. Una vez asegurado este punto, basta saber que el postulado es cierto para $n = 1$; de donde se desprende que lo es también para $n = 2$, luego para $n = 3$ y así sucesivamente; pasando de un número entero cualquiera al entero siguiente, demostramos la exactitud de la afirmación de un modo general.

Es tan frecuente el empleo de este procedimiento que merece llevar un nombre. Podríamos llamarlo "la demostración de n a $n + 1$" o más simplemente "el paso al número entero siguiente". Desgraciadamente el término técnico reconocido es "inducción matemática", nombre que se le dio por una circunstancia casual. La afirmación precisa que tenemos que demostrar puede tener un origen cualquiera, importando poco dicho origen desde el punto de vista lógico. Por lo demás, en muchos casos, como en el que acabamos de exponer en forma detallada, es la inducción la que ha constituido el origen; en cuanto a la afirmación, ha sido determinada experimentalmente, apareciendo la demostración como un complemento matemático de la inducción, lo que explica el término.

7. Pasemos ahora a otro punto, un tanto sutil, pero importante para todos aquellos que quieran descubrir por sí solos demostraciones. En nuestros desarrollos precedentes, hemos obtenido sucesivamente, mediante observación e inducción, dos afirmaciones diferentes; una en el párrafo 1, la otra en el párrafo 2, siendo ésta por lo demás más precisa que la primera. Partiendo de la segunda afirmación, hemos encontrado un medio de verificar el paso de n a $n + 1$, y así hemos podido llegar a una demostración por "inducción matemática". Si hubiésemos partido de la primera, sin conocer ninguna de las precisiones aportadas por la segunda, sin duda no hubiésemos llegado a descubrir esta demostración. De hecho, la primera afirmación es menos precisa, menos "explícita", menos "tangible", menos fácil de poner a prueba y verificarse, que la segunda. Pasar de la primera a la segunda, del enunciado menos preciso al enunciado más preciso, constituye una contribución importante a la demostración final.

Esta conclusión tiene un aspecto paradójico. En efecto, la segunda afirmación es más fuerte, implica inmediatamente la primera, mientras que la primera, un tanto vaga, apenas deja entrever la segunda, más nítida. El teorema más "fuerte" es, pues, más fácil de dominar que el más "débil"; esto constituye la PARADOJA DEL INVENTOR, página 138.

Lector inteligente. El lector inteligente de un libro de matemáticas desea dos cosas:

Primera, ver que el paso del razonamiento que tiene bajo la vista es correcto. Segunda, comprender el propósito de dicho paso.

El auditor inteligente que asiste a un curso de matemáticas tiene los mismos deseos. Si no está seguro de la exactitud de la etapa del razonamiento tratada delante de él y si incluso sospecha que es incorrecta, puede protestar y hacer una pregunta. Pero si no ve el motivo de esta fase del

razonamiento, si no comprende su propósito, no podrá formular ninguna objeción precisa y, por consiguiente, se hallará incapacitado para protestar; entonces, confuso y aburrido, perderá el hilo del razonamiento.

Un profesor —o un autor— inteligente debe tener presentes estos diversos puntos. Es necesario escribir y hablar correctamente; pero ello no basta. Un razonamiento presentado en forma correcta, en un libro o en el pizarrón, puede sin embargo, no ser ni inteligible, ni instructivo si no hace comprender el propósito de las etapas sucesivas, si el lector —o el auditor— no llega a entender el modo por el cual dicho razonamiento se ha obtenido, si la presentación de la solución no le sugiere ningún medio de descubrir por sí mismo un razonamiento del mismo tipo.

Las preguntas y sugerencias de nuestra lista pueden servir tanto al autor como al profesor, subrayando el propósito y los motivos del razonamiento. Una pregunta particularmente útil a este respecto es la siguiente: ¿HEMOS EMPLEADO TODOS LOS DATOS? El autor o el profesor pueden utilizarla para introducir alguna razón de peso para considerar un dato no empleado hasta ese momento. El lector —o el auditor— puede referirse a ella para comprender la razón que tiene el autor —o el profesor— para examinar más atentamente tal o cual elemento; entonces se dará cuenta quizá que planteándose dicha pregunta hubiese podido descubrir por sí mismo esta fase del razonamiento.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716), célebre filósofo y matemático, proyectó escribir un "Arte de la invención", pero nunca lo llevó a efecto. Numerosos fragmentos esparcidos en su obra muestran, sin embargo, que tenía interesantes ideas sobre dicho tema del que subraya con frecuencia su importancia. Así por ejemplo escribió: "No hay nada más importante que el considerar las fuentes de la invención que son, a mi criterio, más interesantes que las invenciones mismas."

Lema significa "teorema auxiliar". La palabra es de origen griego; podría traducirse de un modo más literal por "lo que se admite".

Ejemplo: Buscando la demostración de un teorema A, llegamos a suponer la existencia de otro teorema B. Si B fuese verdadero, podríamos sin lugar a dudas utilizarlo para demostrar A. Admitimos, pues, como cierto B, provisionalmente, dejando para más tarde su demostración y proseguimos con la de A. Dicho teorema B, así admitido, es un teorema auxiliar con relación al teorema A propuesto. Esta breve exposición ilustra bastante bien el significado actual de la palabra "lema".

¿Lo ha visto ya antes? Puede suceder que hayamos resuelto ya el mismo problema que se nos plantea ahora, o al menos que hayamos oído hablar de él, o que hayamos tratado con un problema muy similar. Son estas posibilidades que no debemos dejar de investigar. Tratamos, entonces, de recordarnos de lo que sucedió. *¿Lo ha visto ya antes?* o *¿ha encontrado el mismo problema bajo una forma ligeramente diferente?* Incluso si la respuesta es negativa, este tipo de preguntas puede provocar la "movilización" de conocimientos útiles.

La pregunta que constituye el título del presente artículo se utiliza con frecuencia en un sentido mucho más amplio. Para obtener la solución necesitamos que vengan a la memoria elementos apropiados, hacer un llamado a los conocimientos subyacentes que pueden aplicarse al problema (PROGRESO Y LOGRO). No podemos saber de antemano, claro está, de qué parte de nuestros conocimientos tendremos necesidad, pero existen ciertas posibilidades que no hay que dejar de examinar. Así, tal característica del problema actual que ha jugado un papel en la solución de algún otro problema, puede entrar en juego de nuevo. Por ello, si una de las características del problema actual nos llama la atención por su posible importancia, debemos tratar de reconocerla. ¿En qué consiste?; ¿nos es familiar?; *¿la hemos visto ya antes?*

Llevar al cabo el plan. Concebir un plan y llevarlo a efecto son dos actos diferentes. Ello es igualmente cierto para los problemas matemáticos en los cuales el trabajo varía según se trate de concebir un plan o de llevarlo al cabo.

1. Podemos conformarnos con razonamientos provisionales y simplemente plausibles para guiarnos hacia el razonamiento final y riguroso, del mismo modo que se emplea un andamiaje para sostener un puente durante su construcción. Cuando la obra está lo suficientemente avanzada y se retira el andamiaje, el puente debe mantenerse por sí mismo. Del mismo modo, cuando se ha avanzado en la solución, podemos descartar todos los razonamientos provisionales y simplemente plausibles, debiendo quedar el resultado apuntalado por el solo rigor del razonamiento.

Cuando concebimos un plan que debe conducirnos a la solución, no debemos dudar en emplear un razonamiento simplemente plausible y heurístico, ya que todo lo que puede conducir a una idea buena es bueno. Pero debemos modificar este punto de vista cuando pasamos a la ejecución del plan y no aceptar entonces argumentos que no sean decisivos y rigurosos. *Llevando al cabo el plan, verifique cada paso. ¿Puede ver claramente si son correctos los diversos pasos?*

Cuanto más esfuerzo pongamos en verificar con cuidado cada detalle del plan cuando lo llevamos a efecto, tanto más estamos en libertad de usar el razonamiento heurístico cuando lo concebimos.

2. Debemos considerar el orden en el cual abordaremos la ejecución de los detalles del plan, máxime si se trata de un problema complejo. No debemos omitir ningún detalle, debemos comprender la relación que une

a cada uno de ellos con el conjunto del problema y, no perder de vista la articulación de los principales pasos. Debemos, pues, proceder con orden.

En lo particular no es razonable examinar los detalles secundarios antes de tener la seguridad en cuanto a la exactitud del razonamiento global. Si existe una falla en el desarrollo del conjunto, será inútil verificar la exactitud de tal o de cual otro detalle de menor importancia.

El orden en el cual examinamos los detalles de un problema puede ser muy diferente al orden en que los hemos concebido; y el orden en el cual enunciaremos los detalles en el momento de la exposición definitiva de la solución puede ser incluso diferente a los otros dos. Los elementos de Euclides presentan los detalles del razonamiento en un orden rígido y sistemático que fue con frecuencia imitado y a menudo criticado.

3. En la exposición de Euclides, todos los razonamientos avanzan en la misma dirección: de los datos a la incógnita en los "problemas por resolver", de la hipótesis a la conclusión en los "problemas por demostrar" Cualquier elemento nuevo, punto, línea, etc., debe haberse obtenido de un razonamiento correcto a partir de los datos o a partir de otros elementos previamente derivados de dichos datos. Cualquier afirmación debe demostrarse de igual modo, a partir de la hipótesis o de afirmaciones previamente demostradas de modo correcto. Se examina todo elemento nuevo, toda nueva afirmación en el momento de su aparición; así sólo se tiene que hacer una sola vez. Podemos concentrar toda nuestra atención sobre la fase presente del razonamiento, sin necesidad de mirar hacia atrás o hacia adelante. El último elemento nuevo por verificar como resultante de otros, es la incógnita; la última afirmación cuya demostración tenemos que examinar, es la conclusión. Si cada paso es correcto, incluido el último, el conjunto del razonamiento lo es igualmente.

El tipo de exposición euclideano es aconsejable sin ninguna reserva, siempre que el propósito sea examinar el razonamiento en detalle. En lo particular, si se trata de nuestro propio razonamiento, con frecuencia largo y complicado, ya examinado por nosotros a grandes rasgos y llevado al punto en que no nos resta más que examinar los detalles, nada es mejor que el desarrollarlo por completo por el método euclideano.

Por el contrario, el tipo de exposición euclideano no puede aconsejarse sin reserva si se trata de comunicar un razonamiento a un lector o a un auditorio que no ha oído nunca hablar de él. La exposición euclideana es perfecta si se trata de subrayar cada punto particular, pero menos indicada si lo que se quiere es recalcar las articulaciones esenciales del razonamiento. EL LECTOR INTELIGENTE puede fácilmente constatar la corrección de cada paso, pero le será muy difícil el percibir la fuente, el propósito, la relación de conjunto. La razón de esta dificultad estriba en que la exposición euclideana se desarrolla en un orden que es, la mayor parte de las veces, exactamente opuesto al orden natural de la invención. (La exposición de Euclides, sigue rigurosamente el orden de la "síntesis". Véase PAPPUS, en particular los comentarios 3, 4 y 5; páginas 135-136.)

4. Resumamos. La exposición euclideana que consiste en ir rigurosamente de los datos a la incógnita, de la hipótesis a la conclusión, es perfecta para verificar un razonamiento en detalle, pero está lejos de serlo cuando se trata de hacer comprender los grandes rasgos.

Es muy conveniente que los alumnos examinen sus propios razonamientos en la forma euclideana, yendo de los datos a la incógnita y verificando cada detalle; sin embargo, sería un error inducirlos a observar esta práctica de un modo demasiado riguroso. En cuanto al profesor, no se le recomienda que presente todas las demostraciones de un modo puramente euclideano, pese a que dicha forma podrá a veces serle muy útil después de una discusión donde, como lo recomienda la presente obra, los alumnos, guiados por él, llegasen a descubrir por sí mismos la idea clave de la solución. Parece también recomendable, en cierta medida, el método adoptado por algunos libros de texto, los cuales presentan en principio una especie de esquema intuitivo de la idea general para pasar luego a los detalles expuestos entonces en el orden euclideano.

5. Deseando asegurarse de la exactitud de su proposición, el matemático consciente trata de verlo intuitivamente y dar una demostración formal. *¿Puede ver claramente que su razonamiento es correcto?; ¿puede demostrar que lo es?* Dicho matemático actúa en este sentido al igual que una dama haciendo sus compras y que, para asegurarse de la calidad de un tejido, quiere verlo de cerca y tocarlo. La intuición y la demostración formal son dos modos diferentes de percibir la verdad, comparables a la percepción de un objeto material por medio de dos sentidos diferentes que son: la vista y el tacto.

La intuición puede aventajar, y por mucho, a la demostración formal. Cualquier alumno inteligente, sin ningún conocimiento sistemático de geometría del espacio, puede ver, en el instante que concibe distintamente el significado de los términos, que dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí (pudiendo estar las tres rectas en diferentes planos). Sin embargo, la demostración de esta constatación, tal como se da en la 9ª proposición del libro XI de los Elementos de Euclides, requiere una preparación larga, minuciosa e ingeniosa.

La manipulación formal de las reglas de la lógica y fórmulas del álgebra puede llegar mucho más lejos que la intuición. Casi todos pueden constatar de inmediato que tres rectas, tomadas arbitrariamente, dividen al plano en 7 partes (considerando al triángulo, la sola parte finita formada

por las tres rectas). Pero casi nadie puede ver, incluso concentrándose, que cinco planos, tomados arbitrariamente, dividen al espacio en 26 partes. Sin embargo, se puede demostrar con todo rigor que el número es en efecto 26 e incluso la demostración no es ni larga ni difícil.

Llevando al cabo el plan, verificamos cada paso. Para ello nos podemos basar ya sea en la intuición o en las reglas formales. A veces es la intuición la que lleva la delantera, otras, el razonamiento formal. Es un ejercicio interesante y útil emplear los dos medios. *¿Puede ver claramente que la etapa del razonamiento es correcta?* Sí, puede verlo clara y distintamente. La intuición lleva la delantera; pero, ¿el razonamiento formal no podría alcanzarla?; ¿puede también DEMOSTRAR *que es correcta?*

Tratar de demostrar formalmente lo que se ha visto intuitivamente y de ver intuitivamente lo que se ha demostrado formalmente es un excelente ejercicio intelectual. Desgraciadamente es raro que se disponga en clase del tiempo suficiente para poder practicarlo. El ejemplo discutido en las secciones 12 y 14 es típico en este aspecto.

Mire bien la incógnita. Es un antiguo consejo; en efecto, en latín se decía: "respice finem", es decir, considere el fin. Recuerde lo que quiere lograr. No olvide su propósito. Piense en lo que quiere obtener. No pierda de vista lo que se pide. Mantenga presente el objeto de su trabajo. *Mire bien la incógnita. Mire la conclusión.* Estas dos últimas versiones de "respice finem" están especialmente adaptadas a los problemas matemáticos, a los "problemas por resolver" y a los "problemas por demostrar" respectivamente.

Dedicando nuestra atención a nuestro propósito y orientando nuestra voluntad a la realización de nuestros deseos, pensamos en los medios que van a permitirnos alcanzarlos. ¿Qué medios conducen a este fin?; ¿cómo puede usted alcanzar su meta?; ¿cómo puede obtener un resultado de este género?; ¿qué causas pueden provocarlo?; ¿dónde ha visto usted ya obtener un resultado análogo?; ¿qué se hace, en general, para obtenerlo? *Trate de pensar en un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar. Trate de pensar en un teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o una conclusión similar.* Aquí también las dos últimas recomendaciones están especialmente adaptadas, una a los "problemas por resolver" y la otra a los "problemas por demostrar".

1. Consideremos problemas de matemáticas "por resolver" y la sugerencia: *Trate de pensar en un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita.* Comparemos esta sugerencia a la que implica la pregunta: *¿Conoce un problema que se relacione con el suyo?*

Esta última es más general que la otra. Dos problemas que se relacionen, tienen forzosamente algunos puntos comunes; pueden ser objetos o

nociones comunes, pueden ser datos, pueden ser una o varias partes de la condición, etc. Nuestra primera sugerencia insiste sobre un punto común particular: los dos problemas deben tener la misma incógnita. Es decir que, en los dos casos, la incógnita debe ser un objeto de la misma categoría como, por ejemplo, la longitud de un segmento de recta.

En relación a la sugerencia general, existe en la sugerencia particular una cierta "economía".

Podemos en principio economizar nuestro esfuerzo en vista de la representación del problema que no tenemos que considerar en su conjunto, sino más bien ocuparnos solamente de la incógnita. El problema se nos presenta en forma esquemática:

"Dado. . . , encontrar la longitud del segmento de recta."

Otra economía que podemos hacer es la de la elección. Existen, en efecto, innumerables problemas susceptibles de relacionarse con el problema propuesto, teniendo con él tal o cual punto en común. Pero, considerando la incógnita, limitamos nuestra elección entre todos esos problemas, considerando solamente los que tengan la misma incógnita. Y, naturalmente, incluso entre éstos, examinaremos primero los más elementales y los que nos parezcan más familiares.

2. El problema propuesto tiene la forma siguiente:

"Dado. . . , encontrar la longitud del segmento de recta."

Ahora bien, los problemas muy sencillos y familiares de este tipo conciernen a triángulos: Dadas tres partes constituyentes de un triángulo, determinar la longitud de un lado. Recordando esto, quizá hemos encontrado algo aplicable a la pregunta: *He aquí un problema relacionado al suyo y que usted ha resuelto ya. ¿Puede utilizarlo?; ¿puede utilizar el resultado?* Para utilizar resultados conocidos relativos al triángulo, necesitamos un triángulo en nuestra figura. ¿Hay alguno?; ¿o hace falta hacer aparecer uno para poder sacar provecho de los anteriores resultados conocidos? *¿Debe introducir algún elemento auxiliar para poder emplearlo?*

Existen diversos problemas sencillos cuya incógnita es el lado de un triángulo (difieren en los datos: se pueden dar, por ejemplo, dos ángulos y un lado, o dos lados y un ángulo, con diferentes posiciones del ángulo con relación a los lados dados. Todos los problemas de este tipo son particularmente sencillos en el caso de triángulos rectángulos). Concentrando nuestra atención sobre el problema propuesto, queremos descubrir qué tipo de triángulo conviene introducir, qué problema ya resuelto (con la misma incógnita) se adaptaría mejor a nuestro propósito actual.

Después de introducir el triángulo auxiliar conveniente, puede suceder que todavía no conozcamos los tres elementos constituyentes. Ello, sin embargo, no es una condición indispensable. Si creemos que podemos obtener

de un modo o de otro los elementos faltantes, habremos dado un paso esencial hacia adelante, tenemos un plan de la solución.

3. El proceso esbozado antes (párrafos 1 y 2) se ha ilustrado esencialmente en la sección **10** (de modo un tanto oscuro debido a la lentitud de los alumnos). Es fácil dar numerosos ejemplos análogos. De hecho, se puede llegar al caso de la solución de casi todos los "problemas por resolver" propuestos en las clases de principiantes, empleando apropiadamente la sugerencia: *Trate de pensar en un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.*

Hay que tomar este tipo de problemas de un modo esquemático y mirar primero la incógnita:

1) Dado..., encontrar la longitud del segmento de recta.
2) Dado..., encontrar el ángulo.
3) Dado..., encontrar el volumen del tetraedro.
4) Dado..., encontrar el punto.

Con una mínima experiencia en problemas matemáticos elementales recordaremos fácilmente uno o varios problemas sencillos que nos sean familiares y que tengan la misma incógnita. Si el problema propuesto no figura entre ellos, trataremos de modo natural de emplear lo que nos es familiar en ellos y utilizar el resultado de esos problemas sencillos. Trataremos de introducir en el problema un elemento útil conocido de nosotros; de este modo tendremos un buen principio.

En cada uno de los cuatro casos mencionados existe un plan evidente, una hipótesis plausible del desarrollo ulterior de la solución.

1) La incógnita debe obtenerse como lado de un triángulo. Queda por introducirse un triángulo apropiado con tres elementos conocidos o que sean fáciles de obtener.

2) La incógnita debe obtenerse como ángulo de un triángulo. Queda por introducirse un triángulo apropiado.

3) La incógnita puede obtenerse si el área de la base y la longitud de la altura se conocen. Quedan por determinarse el área de una cara y la altura correspondiente.

4) La incógnita debe obtenerse como la intersección de dos lugares geométricos cada uno de los cuales puede ser una circunferencia o una recta. Quedan por determinarse los lugares geométricos según la condición propuesta.

En todos estos casos, el plan sugiere un problema sencillo que tiene la misma incógnita y la intención de utilizar su resultado o su método. Adoptando un plan de este tipo podemos encontrar dificultades, pero no obstante, obtenemos una idea que nos sirve de punto de partida, lo que constituye una gran ventaja.

4. Dicha ventaja no la tendremos si no encontramos ningún problema, entre los ya resueltos, que tenga la misma incógnita que el problema propuesto. En tal caso es mucho más difícil resolver el problema.

"Determinar la superficie de una esfera de radio dado." Este problema lo resolvió Arquímedes. No hay un solo problema más sencillo o que tenga la misma incógnita y no existía ninguno del cual Arquímedes hubiese podido valerse. Es por ello que su solución puede verse como una de las más notables en matemáticas.

"Determinar la superficie de una esfera inscrita en un tetraedro cuyas seis aristas están dadas." Quien conoce el resultado de Arquímedes, no necesita su propia genialidad para resolver este problema; basta simplemente expresar el radio de la esfera inscrita en función de las aristas del tetraedro. Evidentemente no es sencillo, pero las dificultades por vencer no se pueden comparar a las del problema de Arquímedes.

Conocer o no un problema ya resuelto que tenga la misma incógnita es con frecuencia la única diferencia que hay entre un problema fácil y otro difícil.

5. Cuando Arquímedes logró calcular la superficie de la esfera no conocía, como ya hemos dicho, ningún problema ya resuelto que tuviese la misma incógnita. Pero conocía varios que tenían una similar. Existen superficies curvas cuya área es más fácil de obtener que la de la esfera y que eran bien conocidas en tiempo de Arquímedes, tales como las superficies laterales de los cilindros, de los conos o de los troncos de cono. Con toda seguridad Arquímedes examinó atentamente estos casos similares más sencillos, dado que, en su solución, toma como aproximación de la esfera un volumen compuesto que consta de dos conos y varios troncos de cono (véase DEFINICIÓN, 6; página 71).

Si no logramos encontrar un problema ya resuelto que tenga la misma incógnita que el problema propuesto, trataremos de encontrar uno que tenga una incógnita similar. Los problemas de este tipo se relacionan menos estrechamente que los precedentes al problema propuesto y son, por consiguiente, menos fáciles de emplear, en general, con el propósito perseguido, pero pueden sin embargo, ser una guía que no debemos descartar.

6. Añadamos algunas observaciones concernientes a los "problemas por demostrar"; son análogas a los comentarios precedentes, más extensos, sobre los "problemas por resolver".

Tenemos que demostrar (o refutar) un teorema claramente enunciado. Todo teorema ya demostrado que se relacione de un modo o de otro al teorema propuesto puede sernos útil. Podemos, sin embargo, estimar que entre todos estos teoremas, los que tengan la misma conclusión que el nuestro nos serán particularmente útiles. Sabiendo esto, *miramos la conclusión,*

es decir, consideramos el teorema insistiendo en la conclusión. Esta forma de proceder puede representarse esquemáticamente como sigue:

"Si. . . , entonces los ángulos son iguales."

Concentremos toda nuestra atención en la conclusión que se nos propone y tratemos de *pensar en algún teorema que nos sea familiar y que tenga la misma conclusión o una similar.*

En lo particular, tratemos de pensar en teoremas del mismo tipo, a la vez sencillos y familiares.

En el caso presente existen diversos teoremas del mismo tipo, y podemos acordarnos del siguiente: "Si dos triángulos son semejantes, los ángulos correspondientes son iguales." *He aquí un teorema que se relaciona al suyo y que ya ha sido demostrado. ¿Puede utilizarlo?; ¿debe introducir algún elemento auxiliar para poder utilizarlo?*

Siguiendo estas sugerencias y tratando de ver la ayuda aportada por el teorema del que nos hemos acordado, podemos concebir un plan: Intentemos demostrar la igualdad de los ángulos en cuestión a partir de los triángulos semejantes. Para ello hará falta introducir dos triángulos que tengan dichos ángulos y demostrar que son semejantes. Esto parece ser un buen plan para empezar el trabajo y quizá nos lleve al fin deseado como en la sección 19.

7. Resumamos. Recurriendo a problemas ya resueltos que tienen la misma incógnita o una similar (o a teoremas ya demostrados que tengan la misma conclusión o una similar) tenemos grandes posibilidades de emprender el camino en la dirección correcta y podemos concebir un plan para resolver el problema propuesto. En los casos sencillos, que son los más frecuentes en las clases de principiantes, problemas muy elementales que tengan la misma incógnita (o teoremas que tengan la misma conclusión) son en general más que suficientes. Tratar de acordarse de tales problemas, es un proceso natural que surge del sentido común (compárese con lo dicho a este respecto en la sección 4). Es sorprendente que un proceso tan simple y tan fructuoso no sea más ampliamente conocido; creemos incluso ser los primeros en haberlo formulado como método. En todo caso, en matemáticas, ni los alumnos ni los profesores deben ignorar la sugerencia: *Mire bien la incógnita. Y, trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.*

Notación. Para poner en evidencia las ventajas que ofrece una notación bien escogida y usual, tratemos de sumar algunos números relativamente grandes con la condición de no emplear las cifras arábicas y que no disponemos más que de los números romanos. Tómense, por ejemplo, los números MMMXC, MDXCVI, MDCXLVI, MDCCLXXXI, MDCCCLXXXVII.

No se puede subestimar la importancia de la notación en matemáticas. Los matemáticos modernos que utilizan el sistema decimal tienen una gran ventaja sobre los de la antigüedad, que no disponían para escribir números de un sistema tan práctico. Un alumno medio que, en nuestros días, conoce bien la notación usual del álgebra, la de la geometría analítica, las diferenciales y el cálculo integral, tiene una gran ventaja sobre los matemáticos griegos cuando se trata de resolver problemas de superficie o de volumen, para cuya solución fue necesaria la genialidad de un Arquímedes.

1. Existe un lazo muy íntimo entre la palabra y el pensamiento: las palabras facilitan el pensamiento. Ciertos filósofos y filólogos han ido, incluso, más lejos al afirmar que el uso de las palabras es indispensable al uso de la razón.

Esta afirmación nos parece, sin embargo, exagerada. Si tenemos un poco de experiencia en el trabajo matemático, sabemos que podemos pensar, de modo eficaz, sin emplear palabras, simplemente viendo figuras geométricas y manipulando símbolos algebraicos. Las figuras y los símbolos están estrechamente ligados al pensamiento matemático. Es útil, para pensar, el empleo de figuras o símbolos. Podemos pues, modificar, mejorándola, la afirmación enunciada más arriba —afirmación demasiado limitada— asignando a las palabras el mismo rango que a los otros signos, y decir que el *uso de los signos parece indispensable al uso de la razón.*

De todas formas, el empleo de símbolos matemáticos es análogo al de palabras. La notación matemática aparece como una especie de lenguaje, *une langue bien faite,* un lenguaje perfectamente adaptado a su propósito, conciso y preciso, con reglas que no sufren excepciones.

Si aceptamos este punto de vista, el PLANTEO DE LA ECUACIÓN aparece como una especie de traducción del lenguaje común al lenguaje de los símbolos matemáticos.

2. Algunos de estos símbolos, como los signos $+$, $-$, $=$, etc. . . , tienen tradicionalmente un significado establecido, pero otros, como por ejemplo las letras de los alfabetos latino y griego, se emplean con sentidos diferentes, según los problemas. Cuando emprendemos el estudio de un problema nuevo, tenemos que elegir ciertos símbolos, *introducir una notación apropiada.* Podemos, es cierto, hacer una observación análoga en el empleo del lenguaje común. Muchas palabras se emplean en un sentido que varía según el contexto: cuando importa la precisión, las palabras deben elegirse con cuidado.

La elección de la notación constituye una etapa importante en la solución de un problema. Debe elegirse con cuidado. El tiempo que se consagre a la elección de una notación será largamente compensado por el que ganaremos más tarde al evitar cualquier duda y cualquier confusión. En dicha

elección nos guiará un atento examen de los elementos del problema. Así, una notación apropiada podrá contribuir de modo primordial a la comprensión del problema.

3. Una buena notación debe ser clara, concisa y fácil de retener en la memoria; debe evitar toda interpretación dudosa y utilizar las que puedan ser útiles. El orden de los signos y las relaciones entre ellos deben sugerir el orden y las relaciones de los objetos a los que corresponden.

4. Ante todo, los signos no deben ser *ambiguos*. Es inadmisible que un mismo símbolo designe dos objetos diferentes en el curso de un mismo estudio. Si en un problema, llamamos a a cierta magnitud, se deberá evitar el designar con a otro elemento relacionado al mismo problema. Claro está, si se trata de otro problema, la letra a se puede utilizar entonces en sentido diferente.

Si bien está prohibido emplear el mismo símbolo para designar objetos diferentes, podemos emplear símbolos diferentes para un mismo objeto, como por ejemplo escribir el producto de a por b como sigue:

$$a \times b \qquad a \cdot b \qquad ab$$

Pero, cuando se estime ventajoso proceder así, es decir, emplear dos o más signos diferentes para un mismo objeto, deberá tenerse cuidado. En general vale más emplear un solo signo para un solo objeto, y no emplear varios si no hay necesidad de ello.

5. Los signos elegidos deben ser *fáciles de recordar* y reconocer; cada uno de ellos debe recordarnos el objeto correspondiente y viceversa.

Un procedimiento que permite tener signos fáciles de reconocer consiste en emplear *iniciales* como símbolos. Por ejemplo, en la sección **20**, hemos elegido r para la rapidez, t para el tiempo, v para el volumen. Pero esto no es siempre posible. Así en la misma sección **20**, hemos tenido que considerar un radio al cual no podíamos asignar la letra r dado que ésta se había tomado para designar una rapidez. Existen otros motivos que limitan la elección de símbolos, y otros medios de hacerlos más fáciles de reconocer: discutiremos los unos y los otros.

6. Una notación no es solamente fácil de reconocer, sino también particularmente útil en la ayuda de la concepción del problema, cuando *el orden y la relación de los signos sugieren el orden y la relación de los objetos.* He aquí algunos ejemplos destinados a ilustrar este punto.

I) Para designar objetos que están cerca uno del otro en la concepción del problema, elegiremos en el alfabeto letras que estén cercanas.

Así, emplearemos generalmente letras del principio, como a, b, c, para las cantidades dadas o constantes, y letras del final, como x, y, z, para cantidades desconocidas o variables.

En la sección **8** hemos empleado a, b y c para designar el largo, el ancho y la altura de un paralelepípedo que constituían los datos del problema. Dicha notación ha parecido preferible a la que hubiese consistido en emplear iniciales, l, a, A. En efecto, al representar las tres dimensiones el mismo papel en el problema, este hecho queda recalcado por el uso de letras consecutivas. Además, al figurar al principio del alfabeto, las letras a, b y c, ya lo hemos dicho, son las más usuales cuando se trata de designar cantidades dadas. En otro problema en el cual las tres dimensiones jugasen papeles diferentes y donde fuese conveniente distinguir las horizontales de la vertical, podría ser preferible el empleo de las iniciales l, a, A.

II) Para designar objetos pertenecientes a una misma categoría, elegimos con frecuencia letras de un mismo alfabeto, y nos valemos de otros alfabetos diferentes para otras categorías. Así por ejemplo, en geometría plana, empleamos con frecuencia:

Mayúsculas latinas como A, B, C. . . . para puntos,
minúsculas latinas como a, b, c, . . . para líneas,
minúsculas griegas como α, β, γ, . . . para ángulos.

En presencia de dos objetos pertenecientes a categorías diferentes, pero que tienen entre sí una relación importante, podemos elegir, para designarlos, letras correspondientes de alfabetos diferentes: A y a, B y b, y así por el estilo. Un ejemplo de lo más característico está dado por la notación habitualmente empleada para el triángulo:

A, B, C representan los vértices
a, b, c los lados
α, β, γ los ángulos.

Se sobreentiende que a es el lado opuesto al vértice A y que el ángulo en A es α.

III) En la sección **20**, las letras a, b, x, y están particularmente bien elegidas para indicar la naturaleza de los elementos designados y la relación entre ellos. Las letras a y b sugieren el hecho de que las magnitudes designadas son constantes, mientras que x y y designan variables; por otra parte a precede a b como x precede a y, lo que nos muestra la misma relación entre a y b que entre x y y. En efecto, a y x son horizontales, b y y verticales, y $a : b = x : y$.

7. La notación

$$\Delta ABC \sim \Delta EFG$$

indica que los dos triángulos son semejantes. En las obras modernas, esta fórmula especifica además que en los dos triángulos semejantes, los vértices se corresponden en el orden en que se han escrito: A a E, B a F, C a G. Las obras más antiguas no lo hacían así, y el lector debía mirar la figura o recordar el texto para saber cómo se correspondían entre sí los vértices.

La notación moderna es preferible a la antigua. Gracias a ella podemos deducir las consecuencias de la fórmula *sin mirar la figura*. Así, podemos deducir que

$$\measuredangle A = \measuredangle E$$
$$AB : BC = EF : FG$$

y, al igual, otras relaciones del mismo orden. La notación antigua es menos significativa y no permite conclusiones tan precisas.

Se puede decir que una notación más significativa que otra es más *rica*. La notación moderna para los triángulos semejantes es más rica que la antigua, refleja el orden y las relaciones de las cosas de un modo más completo y, por consiguiente, puede permitr el deducir mayor número de consecuencias.

8. Las palabras tienen significados secundarios. Queremos decir con esto que, en las frases donde son empleadas, el contexto puede influir sobre ellas, añadir a su significado normal (primario) un matiz, un significado secundario, una "connotación". Así pues, para escribir lo mejor posible, eligiremos de preferencia, entre las palabras casi sinónimas, aquellas cuyo segundo significado se adapte mejor.

Hay algo similar en la notación matemática. Incluso los símbolos matemáticos pueden adquirir una especie de significado secundario, proveniente de contextos en los que con frecuencia se les emplea. En la elección que hagamos de una notación adecuada, tenemos que tener en cuenta esta circunstancia. Ilustremos el punto.

Existen ciertas letras que han adquirido un significado tradicional, profundamente arraigado. Así, *e* representa en general la base de los logaritmos naturales, *i* la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$, π la relación de la circunferencia a su diámetro. Vale más, en general, no emplear estos símbolos sino en su significado tradicional dado que, si los empleamos en sentido diferente, puede suceder que se nos imponga su significado tradicional y ello nos induzca en error. Observemos por lo demás que estos segundos significados, con frecuencia peligrosos, molestan menos al principiante, de conocimientos limitados, que al matemático experimentado; pero la experiencia de este último debe ser suficiente para vencer este tipo de dificultad.

El significado secundario de un símbolo puede ser igualmente útil, incluso con largueza, si se emplea con tacto. Una notación ya empleada puede ayudar al investigador al recordarle un proceso interesante; se requiere, claro está, tener el cuidado de distinguir claramente el significado actual (significado primario) del símbolo de su significado precedente (significado secundario). Una *notación fija* [como la que es tradicional para los diversos elementos del triángulo y que hemos mencionado antes, 6 II)] presenta grandes ventajas; si se utiliza varias veces, nos ayudará recordándonos diversos procedimientos ya empleados; nos acordamos mejor de las fórmulas que se escriben con una notación fija. Desde luego, tenemos que tener un cuidado enorme cuando ciertas circunstancias nos obligan a emplear una notación tradicional con un significado ligeramente diferente a su significado habitual.

9. Cuando podemos elegir entre varias notaciones, podemos inclinarnos hacia una por tal razón, hacia otra por tal otra razón, etc. . . Se requiere experiencia y gusto para elegir la más apropiada, al igual que para elegir la palabra más conveniente. No está por demás, sin embargo, conocer las diversas ventajas y desventajas expuestas aquí. Retengamos al menos que tenemos que tener mucho cuidado al elegir la notación, elección que debe motivarla una *razón válida*.

10. No sólo los malos alumnos de una clase muestran aversión por el álgebra; esto puede ocurrirles a estudiantes inteligentes. Siempre hay algo de arbitrario y artificial en una notación; es pesada tarea para la memoria el aprender un nuevo sistema. Un alumno inteligente puede negarse a ello si no capta la razón. La aversión que muestra hacia el álgebra está justificada si no se le han dado ocasiones frecuentes de constatar por la experiencia la ayuda evidente que el *lenguaje de símbolos matemáticos puede ofrecer a la mente*. Ayudarle en tal experiencia es un deber importante del profesor, diremos incluso esencial, nada fácil por lo demás.

Las observaciones precedentes nos han parecido de cierta utilidad. Véase también PLANTEO DE LA ECUACIÓN. Se puede recomendar, como ejercicio particularmente instructivo, la verificación de una fórmula mediante la discusión de sus características (véase la sección 14 y, ¿PUEDE COMPROBAR EL RESULTADO?, 2; página 167).

Pappus, célebre matemático griego, vivió probablemente hacia el año 300 antes de J.C. En el séptimo libro de sus *Collectiones* trata un tema que llama ἀναλυόμενος (*analyomenos*), lo que podemos traducir por "Tesoros del análisis" o "Arte de resolver problemas" o incluso por "Heurística", pareciéndonos este último término el más adecuado. Lo que sigue es una adaptación libre del texto original.

"La heurística, para llamarla por su nombre, es un resumen, una doctrina especial para uso de aquellos que, tras haber estudiado los elementos ordinarios, desean dedicarse a la solución de problemas matemáticos; no sirve más que para esto. Es la obra de tres hombres, Euclides, autor de los Elementos, Apollonius de Perga y Aristaeus el mayor. Enseña los métodos de análisis y síntesis.

"En análisis, partiendo de lo que es requerido, lo consideramos como admitido, sacamos las consecuencias, después las consecuencias de dichas consecuencias, hasta llegar a un punto que podamos utilizar como punto de

partida para una síntesis. Pues en análisis admitimos, como ya hecho, lo que nos piden que hagamos, como encontrado lo que buscamos, como verdadero lo que hay que demostrar. Buscamos de qué antecedente se podría deducir el resultado deseado; después buscamos cuál podría ser el antecedente de este antecedente, y así sucesivamente, hasta que pasando de un antecedente a otro, encontremos finalmente alguna cosa conocida o admitida como cierta. Dicho proceso lo llamamos análisis, solución hacia atrás o razonamiento regresivo.

"En la síntesis, por el contrario, invirtiendo el proceso, partimos del último punto alcanzado en el análisis, del elemento ya conocido o admitido como cierto. Deducimos lo que en el análisis le precedía y seguimos así hasta que, volviendo sobre nuestros pasos, llegamos finalmente a lo que se nos pedía. Dicho proceso lo llamamos síntesis, solución constructiva o razonamiento progresivo.

"Hay dos tipos de análisis; el primero es el análisis de los «problemas de demostración», cuyo objeto es establecer teoremas verdaderos; el otro es el análisis de los «problemas por resolver», cuyo objeto es determinar la incógnita.

"En un «problema de demostración», se nos pide demostrar o refutar un teorema A claramente enunciado. No sabemos si A es verdadero o falso; pero de A derivamos otro teorema B, luego de B otro teorema C, y así sucesivamente hasta llegar a un último teorema L ya conocido. Si L es verdadero, A lo será igualmente, con tal de que todas las derivaciones sean reversibles. A partir de L, demostramos K que precedía a L en el análisis y, así, regresando paso a paso, llegamos a demostrar B partiendo de C y, finalmente, demostramos A partiendo de B, alcanzando nuestra meta. Por lo demás, si L es falso demostramos que A era igualmente falso.

"En un «problema por resolver», se nos pide determinar una cierta incógnita x que satisfaga una condición claramente enunciada. No sabemos si dicha condición puede ser satisfecha, pero admitiendo que una incógnita x satisface la condición impuesta, podemos derivar otra incógnita y que debe satisfacer una condición relacionada con la primera; después relacionamos y con una tercera incógnita y así sucesivamente hasta llegar a una última incógnita z que podemos determinar por algún método conocido. Si realmente existe una incógnita z que satisface la condición impuesta, igualmente existirá una incógnita x que satisfaga la condición primitiva, con tal de que todas las derivaciones sean reversibles. Determinamos primero z, después, conociendo z, determinamos la incógnita que precedía a z en el análisis; y procediendo así, paso a paso, llegamos a y, de donde finalmente determinamos x, logrando así lo propuesto. Si por el contrario, nada satisface la condición impuesta a z, el problema relativo a x no tiene solución."

No olvidemos que lo que precede no es una traducción literal, sino una adaptación, una *paráfrasis*. Ciertas diferencias entre los dos textos merecen anotarse, dado que el texto de Pappus es importante en muchos sentidos.

1. Nuestra paráfrasis emplea una terminología más precisa que el original e introduce los símbolos $A, B, \ldots L, x, y \ldots z$ que aquél no lleva.

2. La paráfrasis habla de "problemas matemáticos" (pág. 133, línea 35), mientras que el original habla de "problemas geométricos". Ello subraya el hecho de que los métodos descritos por Pappus no se limitan exclusivamente a problemas geométricos, ni incluso a problemas matemáticos. Ilustraremos lo dicho mediante ejemplos, dado que, en tal caso, conviene generalizar y desligarse de la naturaleza del tema (véase sección 3).

3. *Ejemplo algebraico.* Determinar la incógnita x en la ecuación

$$8\,(4^x + 4^{-x}) - 54\,(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$$

Se trata de un "problema por resolver" que no tiene nada de fácil para un principiante; requiere, en efecto, una cierta familiaridad con el análisis, no con la palabra, es evidente, sino con la idea de alcanzar la meta por medio de reducciones repetidas. Además, se requiere un buen conocimiento de ecuaciones más simples. Incluso con dichos conocimientos, serán necesarios una buena idea, un poco de suerte y un espíritu inventivo que le lleve a observar que, puesto que $4^x = (2^x)^2$ y $4^{-x} = (2^x)^{-2}$, puede ser conveniente el introducir una nueva incógnita

$$y = 2^x.$$

En efecto, esta sustitución es realmente conveniente dado que la ecuación obtenida para y

$$8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \frac{1}{y}\right) + 101 = 0$$

parece más sencilla que la ecuación primitiva. Pero todavía no basta. Se requiere otra pequeña idea e introducir otra incógnita:

$$z = y + \frac{1}{y}$$

que transformará la condición en

$$8\,z^2 - 54\,z + 85 = 0$$

Aquí termina el análisis, a condición de que el que resuelve el problema sepa resolver ecuaciones de segundo grado.

¿Cuál es la síntesis? El hecho de llevar a buen término, gradualmente, los cálculos que el análisis dejaba prever como posibles. El que resuelve el problema no necesita nuevas ideas para terminarlo, sino únicamente paciencia y atención para calcular las diversas incógnitas. El orden del cálculo es

inverso al orden de la invención; se determina primero z ($z = 5/2, 17/4$), después y ($y = 2, 1/2, 4, 1/4$) y finalmente, x la incógnita pedida en un principio ($x = 1, -1, 2, -2$). La síntesis recorre el análisis paso por paso y es fácil ver el porqué en el caso presente.

4. *Ejemplo no matemático.* Un hombre primitivo quiere cruzar un arroyo, pero no lo puede hacer como de costumbre debido a una crecida que se ha presentado la noche anterior. El cruce del arroyo se torna, pues, tema de un problema; "cruzar el arroyo" es la x del problema original. El hombre puede acordarse de haber cruzado un arroyo sobre un árbol abatido. Busca en torno suyo para ver si encuentra uno, convirtiéndose este árbol abatido en su nueva incógnita y. No llega a encontrar ningún árbol abatido, pero observando que el arroyo está bordeado de árboles, es su deseo que uno de ellos cayese a tierra. ¿Podría hacer caer uno a través del arroyo? He ahí una brillante idea que plantea una nueva incógnita: ¿Cómo obrar sobre el árbol para hacerlo caer justamente a través del arroyo?

Si aceptamos la terminología de Pappus deberíamos llamar "análisis" a esta serie de ideas. Si el hombre primitivo lleva al cabo su análisis, puede resultar ser el inventor del puente y del hacha. ¿Cuál será la síntesis? La conversión de las ideas en actos, siendo el acto final el cruce del arroyo por medio del árbol.

Los mismos objetos forman parte del análisis y de la síntesis; haciendo trabajar la mente del hombre en el primer caso, sus músculos en el segundo; el análisis consiste en pensamientos, la síntesis en actos. Hay, sin embargo, entre ellas otra diferencia y es que el orden está invertido. El cruce del arroyo es el deseo primordial de donde arranca el análisis y es igualmente el acto final al que llega la síntesis.

5. La paráfrasis sugiere, de un modo un poco más preciso que el original, el lazo natural existente entre análisis y síntesis. Dicha relación es manifiesta después de los ejemplos anteriores. El análisis precede, naturalmente, a la síntesis; *el análisis es la invención, la concepción del plan del cual la síntesis es la ejecución.*

6. La paráfrasis conserva, e insiste incluso sobre ellas, ciertas frases un tanto curiosas del original: "admitamos que lo que se nos pide hacer ya está hecho, lo que buscamos ya está encontrado, que lo que hay que demostrar es verdadero". Es paradójico. ¿No es absurdo admitir que el problema por resolver está resuelto? Es también un tanto oscuro. ¿Qué es lo que esto significa? Si examinamos el contexto de cerca y tratamos de utilizar honestamente nuestra experiencia personal en la solución de problemas, el significado no puede ser equívoco.

Consideremos primero un "problema por resolver". Llamemos x la incógnita y a, b, c los datos. "Admitir el problema como resuelto", es admitir que existe un objeto x que satisface la condición, es decir, que establece con los datos a, b, c las relaciones prescritas por la condición. Esta hipótesis, planteada exclusivamente para permitir comenzar el análisis, es provisional e inofensiva. Dado que, *si* dicho objeto no existe y el análisis nos conduce a cierta parte, nos conducirá forzosamente a un problema final que no tenga solución, y por lo tanto, se pondrá de manifiesto que el problema original tampoco la tenía. Así pues, la hipótesis habrá sido útil. Para examinar la condición, tenemos que concebir o visualizar geométricamente las relaciones existentes entre x y a, b, c prescritas por la condición. ¿Cómo hacerlo sin concebir x como existente? En fin, la hipótesis es natural. El hombre primitivo, cuyas ideas y actos hemos discutido en el párrafo 4, se ve cruzando el arroyo sobre un árbol abatido antes de poder hacerlo efectivamente; ve su problema "resuelto".

El objeto de un "problema de demostración" es la demostración de un cierto teorema A. El consejo de "admitir A como verdadero" no es más que una invitación a sacar las consecuencias de dicho teorema, aunque no se haya todavía demostrado. Aquellos que, por disposición de su mente o filosofía, se rehusen a hacerlo no podrán jamás comenzar un análisis.

Compárese con FIGURAS, 2; página 93.

7. Dos veces se ha empleado, en la paráfrasis, la frase "con tal de que todas las derivaciones sean reversibles"; véase pág. 134, líneas 23, 24 y 37. Se trata de una interpolación: el original nada parecido menciona, siendo observada y criticada en los tiempos modernos la ausencia de dicha condición. Véase PROBLEMA AUXILIAR, 6, en lo que concierne a la noción de "reducción reversible"; página 155.

8. El "análisis de los problemas de demostración" se ha explicado en la paráfrasis en forma totalmente diferente a la empleada en el original, pero el sentido no se ha modificado, y en todo caso, no hay ninguna intención de hacerlo. En cuanto al análisis de los "problemas por resolver", se ha explicado en la paráfrasis en forma más concreta que en el original; éste parece querer describir un método más general, la construcción de una *cadena de problemas auxiliares equivalentes, tal como lo hemos descrito en* PROBLEMA AUXILIAR, 7; página 156.

9. Muchos textos de geometría elemental contienen algunas observaciones sobre análisis, síntesis y sobre el hecho de "considerar el problema como resuelto". No es de dudarse que esta tradición, sólidamente implantada, se remonte a Pappus, pese a que ninguno de los textos en cuestión se refiera a dicho filósofo. El tema es bastante importante como para ser mencionado incluso en textos elementales, pero con el riesgo de ser mal interpretado. El solo hecho de que esté limitado a los textos de geometría demuestra una evidente falta de comprensión (ver párrafo 2). Si las consi-

deraciones precedentes pudiesen contribuir a mejorar dicha comprensión de la cuestión, su desarrollo estaría ampliamente justificado.

Para otro ejemplo, un punto de vista diferente y comentarios más extensos, véase RAZONAMIENTO REGRESIVO; compárese igualmente REDUCCIÓN AL ABSURDO y DEMOSTRACIÓN INDIRECTA.

Paradoja del inventor. El plan más ambicioso puede ser también el mejor.

Tal proposición puede parecer paradójica. Sin embargo, cuando se pasa de un problema a otro, se puede observar con frecuencia que el nuevo problema, más "ambicioso" que el primero, es por lo demás más fácil de resolver. Puede ser más fácil responder a varias preguntas que a una sola. El teorema cuyo alcance es más extenso puede ser más fácil de demostrar; el problema más general, más fácil de resolver.

Por otra parte, la paradoja desaparece si examinamos de cerca algunos ejemplos (GENERALIZACIÓN, 2; INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, 7). El plan más ambicioso puede tener más probabilidades de éxito a condición de que no se funde en la pura pretensión sino en alguna visión de las relaciones que sobrepase las que se encuentran en primer término.

Particularización. Consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño —o incluso de un solo objeto— contenido en el conjunto dado. La particularización es con frecuencia útil en la solución de problemas.

1. *Ejemplo.* En un triángulo sea r el radio del círculo inscrito, R el radio del círculo circunscrito y H la altura mayor. Se tiene entonces

$$r + R \leqq H$$

Se trata de demostrar (o refutar) este teorema; * es un "problema por demostrar".

El teorema propuesto es de tipo poco común y puede ser difícil el recordar algún teorema relativo a triángulos que tenga una conclusión similar. Si no encontramos alguno, podemos tratar de verificar el teorema en un *caso particular*, por ejemplo, en el caso que el triángulo fuese equilátero. En dicho caso

$$r = \frac{H}{3} \qquad R = \frac{2H}{3}$$

lo que implica, en dicho caso, que el teorema es correcto.

Si no se presenta ninguna otra idea, podemos tratar entonces el *caso particular menos restringido* del triángulo isósceles. La forma de un triángulo isósceles varía con el ángulo en el vértice, existiendo dos casos límites,

* *The American Mathematical Monthly*, vol. 50 (1943) pág. 124 y vol. 51 (1944) págs. 234-236.

el caso en que el ángulo en el vértice es igual a 0° y el caso en que es igual a 180°. En el primer caso, la base del triángulo isósceles se reduce a cero y es notable que

$$r = 0 \qquad R = \frac{1}{2}H$$

Por consiguiente el teorema se verifica. En el segundo caso límite, las tres alturas se anulan y se tienen

$$r = 0 \qquad R = \infty \qquad H = 0$$

La proposición no se verifica. Hemos demostrado que el teorema propuesto es falso y así queda resuelto el problema.

Observemos de paso que la proposición resulta igualmente falsa en el caso del triángulo isósceles cuyo ángulo en el vértice es casi de 180°. Podemos, pues, descartar "oficialmente" los casos extremos que parecerían no ser del todo "ortodoxos".

2. *"L'exception confirme la règle." "La excepción confirma la regla."* Este dicho no es más que una especie de broma, imaginada para ridiculizar la flexibilidad de un cierto tipo de lógica. Hablando seriamente, diremos que, al contrario, una sola excepción basta para refutar irrevocablemente lo que pretende ser una regla o una afirmación de carácter general. El método más corriente y con frecuencia el mejor para refutar tal proposición consiste precisamente en encontrar un objeto que no encuadre con ella; ciertos autores llaman a dicho objeto *contra-ejemplo.*

La proposición que por hipótesis es general, concierne a un cierto conjunto de objetos; para refutarla *particularizamos* eligiendo, en dicho conjunto, un objeto que no encuadre en ella. El ejemplo precedente, párrafo 1, muestra cómo se opera. Podemos examinar, en principio, cualquier caso particular sencillo, es decir, un objeto, elegido al azar, en el cual podamos fácilmente verificar la proposición. Si la experiencia muestra que el caso no encuadra en la proposición general esa se da por refutada, quedando terminada nuestra labor. Si al contrario, el objeto examinado confirma la proposición, es posible deducir algo útil de su examen. Podemos tener la impresión de que la proposición, pese a todo, es cierta, y quizá ello nos dé una idea de la dirección en que tenemos que buscar la demostración. O bien, como en el ejemplo del párrafo 1, podemos entrever dónde y cómo buscar el contra-ejemplo, es decir, otros casos particulares para examinar. Podemos modificar el caso ya examinado, variarlo, buscar algún caso particular menos restringido, tratar de encontrar casos extremos, como en el párrafo 1.

Los casos extremos son particularmente instructivos. Si una afirmación general se supone aplicable a todos los mamíferos, debe aplicarse igual-

mente a un mamífero tan raro como la ballena: no olvidemos el caso extremo de la ballena. Examinándolo de cerca quizá lleguemos a refutar la afirmación general, ya que estos casos extremos corren el riesgo de ser olvidados por los inventores de generalidades. Si al contrario, constatamos que la proposición se verifica incluso en el caso extremo, deduciremos de dicha constatación una demostración por inducción tanto más sólida cuanto más grandes eran los riesgos de refutación. Estamos, pues, tentados a transformar el dicho del cual partimos y decir: "La posible excepción permite el estudio de la regla."

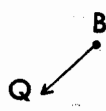
3. *Ejemplo.* Se conoce la velocidad de dos barcos y sus posiciones en un momento dado; cada barco sigue un camino rectilíneo con velocidad constante. Determinar la distancia entre los dos barcos cuando están más cerca uno de otro.

¿Cuál es la incógnita? La mínima distancia entre dos móviles, considerando a estos como puntos materiales.

¿Cuáles son los datos? Las posiciones iniciales de los puntos materiales móviles y la velocidad de cada uno de ellos. Dichas velocidades son constantes en valor absoluto y en dirección.

¿Cuál es la condición? Se debe evaluar la distancia entre los móviles cuando esa es mínima, es decir, en el momento en que los móviles están más cerca uno de otro.

Dibuje una figura. Introduzca una notación apropiada. En la figura 15, los puntos A y B indican la posición inicial dada de los dos barcos. Los segmentos de recta orientados (vectores) AP y BQ representan las velocidades



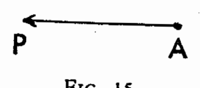


FIG. 15

dadas de tal forma que el primer barco se desplaza según la recta que pasa por los puntos A y P y cubre la distancia AP en la unidad de tiempo; el segundo barco se desplaza del mismo modo siguiendo la recta BQ.

¿Cuál es la incógnita? La mínima distancia entre los dos barcos, uno desplazándose a lo largo de AP y el otro a lo largo de BQ.

En este momento el problema está claro; sin embargo, si sólo queremos utilizar medios elementales, podemos todavía preguntarnos cómo se puede resolver. No es de los más fáciles, y su dificultad estriba en una particularidad que podemos expresar diciendo "que hay demasiada variedad". Las posiciones iniciales A y B, así como las velocidades AP y BQ pueden darse de diversos modos; de hecho, los cuatro puntos A, B, P y Q se pueden elegir arbitrariamente. Ahora bien, la solución requerida debe convenir sean cuales fueren los datos y no vemos todavía el medio de hacer cuadrar una misma solución con todas estas posibilidades. Esta impresión de "demasiada variedad" puede dar lugar, a la pregunta y siguiente respuesta:

¿Podría imaginar algún problema relacionado al suyo y que sea más accesible?; ¿un problema más particular? Existe, claro está, el caso extremo en el que una de las velocidades sea nula. En efecto, el barco puede echar ancla en B y Q coincidir con B. La distancia más corta entre el barco parado y el barco navegando será la perpendicular bajada desde el primero a la recta por la cual se desplaza el segundo.

4. Si esta última idea nos viene a la mente al mismo tiempo que un presentimiento que nos incita a llevar más lejos el caso, si, en otros términos, presentimos que este caso particular extremo (que podría parecernos demasiado sencillo para ser interesante) va a tener un cierto papel en nuestra investigación, podemos calificar de brillante esta idea.

He aquí un problema relacionado al suyo: problema particular que acaba de resolver. *¿Puede utilizarlo?; ¿podría emplear su resultado?; ¿debe introducir algún elemento auxiliar para poder utilizarlo?* Hay que utilizarlo, ¿pero cómo? ¿Cómo se puede utilizar el resultado obtenido en el caso en que B permanece parado mientras B se desplaza? La inmovilidad es un *caso particular* del movimiento; y el movimiento mismo es relativo. Es por ello que, sea cual fuere la velocidad dada para B, puedo considerar a B como en reposo. Enunciemos esta idea más claramente: si doy a todo el sistema representado por dos barcos el mismo movimiento uniforme, las posiciones relativas no cambian, las distancias relativas entre los dos barcos permanecerán iguales, especialmente la más corta. Puedo, pues, dar un movimiento que reduzca a cero la velocidad de uno de los barcos y así reducir el caso general del problema al caso particular que acabo de resolver. Añadamos a BQ y a AP una velocidad opuesta a BQ, pero de igual magnitud. Es este el elemento auxiliar que va a permitir utilizar el resultado particular.

La figura 16 muestra cómo determinar la mínima distancia BS.

5. La solución precedente (párrafos 3 y 4) tiene un desarrollo lógico que amerita analizarse y recordarse.

Para resolver el problema inicial (párrafo 3, primeras líneas) hemos resuelto en principio otro problema al que llamamos problema auxiliar (párrafo 3, últimas líneas) y que es un caso particular del problema inicial (caso extremo en el que uno de los dos barcos está parado). Ese problema inicial había sido propuesto mientras que el problema auxiliar ha sido imaginado en el transcurso de la solución. Mientras que el problema inicial parecía difícil, la solución del problema auxiliar se ha obtenido de inmediato; este último era desde luego, como caso particular, mucho *menos ambicioso* que el problema inicial. ¿Cómo ha sido posible resolver este último a partir del auxiliar? Simplemente por la introducción, en el pro-

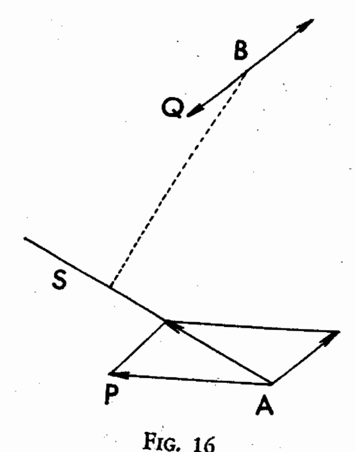


FIG. 16

blema auxiliar, de una observación suplementaria e importante acerca de la relatividad del movimiento.

Si hemos logrado resolver el problema inicial, ello se debe a dos observaciones. Primera, imaginar un problema auxiliar cuya ayuda nos ha sido útil. Después hemos descubierto una observación importante que nos ha permitido pasar de este problema al problema inicial. Hemos resuelto así el problema propuesto en dos etapas, del mismo modo que se puede cruzar un arroyo de dos pasos si se encuentra en medio una piedra que permita, provisionalmente, apoyarse en ella.

En suma, hemos utilizado el problema auxiliar —particular, más fácil, menos ambicioso— *como peldaño.*

6. La particularización tiene otros muchos usos de los que no podemos tratar aquí; mencionemos solamente que puede usarse en la verificación de la solución (¿PUEDE COMPROBAR EL RESULTADO?, 2; página 167.)

El profesor necesita con frecuencia de un tipo de particularización un tanto primitiva que consiste en dar a los elementos matemáticos abstractos

de un problema UNA INTERPRETACIÓN CONCRETA. Por ejemplo, si el problema considera un paralelepípedo rectangular, el profesor puede tomar como ejemplo el salón donde da su clase (sección 8). En geometría analítica del espacio, puede utilizar un rincón de la clase como origen de coordenadas, el suelo y dos muros como planos coordenados, tres aristas de la sala como ejes de coordenadas. Para explicar la noción de superficie de revolución, *puede trazar con la tiza una curva bajo la puerta al abrirla* despacio. Son procedimientos sencillos, pero eficaces para hacer comprender mejor las matemáticas a los alumnos. Siendo las matemáticas una ciencia muy abstracta, debería presentarse muy concretamente.

Pedantería y maestría son dos actividades opuestas que se pueden adoptar respecto a las reglas.

1. Aplicar una regla al pie de la letra, en forma rígida, sin plantearse preguntas, tanto si es aplicable o no, es pedantería. Ciertos pedantes no son sino pobres gentes que nada han comprendido de las reglas que aplican tan a conciencia y sin ningún discernimiento. Otros, sin embargo, obtienen resultados excelentes: son aquellos que, habiendo comprendido las reglas, al principio al menos (antes de volverse pedantes) han elegido una buena, aplicable a numerosos casos y que sólo falla ocasionalmente.

Aplicar una regla con cierta soltura, con juicio, notando los casos convenientemente y sin dejar jamás que la formulación verbal oscurezca el fin de la acción o las oportunidades de la situación, he ahí la maestría.

2. Las preguntas y sugerencias de nuestra lista pueden ser útiles tanto a los maestros como a quienes resuelven problemas. Pero, ante todo, se deben comprender, aprender por tanteos el modo de emplearlas pasando por una serie de fracasos y de éxitos y experimentar su aplicación. En segundo lugar, jamás se deben emplear en forma pedante. Jamás plantear una pregunta o hacer una sugerencia sin reflexionar, como si se obedeciese a una costumbre rígida. Dispóngase a escuchar preguntas y sugerencias variadas y ponga a prueba su facultad de juicio. Si trabaja en un problema cada una de sus tentativas le debe ser inspirada libremente por medio de un examen atento del problema. Si usted quiere ayudar a un alumno, sus consejos deben provenir de la comprensión de sus dificultades.

Y si, inclinado a la pedantería, estima que debe apoyarse en una regla, observe esta: emplear siempre y ante todo la inteligencia.

Planteo de la ecuación. El planteo de la ecuación es semejante a una traducción (véase NOTACIÓN, 1). Dicha comparación, empleada por Newton en su *Arithmetica universalis,* puede ayudar a esclarecer la naturaleza de ciertas dificultades con que tropiezan con frecuencia tanto maestros como alumnos.

1. Plantear la ecuación es expresar por medio de símbolos matemá-

ticos una condición formulada en palabras. Es traducir el lenguaje llano a fórmulas matemáticas. Las dificultades que podemos tener en plantear la ecuación de un problema son idénticas a las que nos ofrece una traducción.

Para traducir una frase del español al inglés dos cosas son necesarias: Primera, comprender a fondo la frase española y, segunda, estar familiarizado con las formas de expresión propias del inglés. La situación es muy semejante cuando se trata de expresar en símbolos matemáticos una condición propuesta en palabras. Se requiere el comprender a fondo la condición y estar familiarizado con las formas de expresión matemáticas.

Cuando se puede hacer literalmente, palabra por palabra, resulta bastante fácil traducir al inglés un texto español; pero existen expresiones del español para las cuales ello no es posible. Si el texto contiene expresiones de este tipo, la traducción resulta difícil: deberemos dedicar más atención al sentido general del texto que a las palabras mismas, y antes de traducirlo, tendremos sin duda que cambiarlo.

Sucede exactamente igual en el planteo de la ecuación. En los casos sencillos, el enunciado verbal se divide casi automáticamente en diversas partes, cada una de las cuales puede ser inmediatamente transcrita en términos matemáticos. En los casos más complicados, la condición comprende elementos que no pueden ser de inmediato traducidos en símbolos; deberemos entonces dedicar menos atención al enunciado para concentrarnos más en el sentido. Y en tales casos, antes de poner fórmulas por escrito, deberemos transformar primero la condición aunque teniendo presentes todos los recursos del lenguaje matemático.

En todos los casos, sencillos o complicados, tenemos que comprender la condición, *distinguir sus diversas partes* y preguntarnos: *¿Pueden formularse?* En los casos sencillos, lograremos fácilmente dividir la condición en elementos fáciles de transcribir en símbolos matemáticos; en los casos difíciles, dicha operación es menos evidente.

Relea esta exposición tras el estudio de los siguientes ejemplos.

2. *Encontrar dos números tales que su suma sea 78 y su producto 1296.*

Dividamos verticalmente la página en dos. De un lado escribamos el enunciado, distinguiendo sus diversas partes; del otro lado, escribiremos los signos algebraicos correspondientes a cada parte del enunciado. El original a la izquierda, la traducción, en símbolos, a la derecha.

Formulemos el problema

En español	En lenguaje algebraico
Encontrar dos números	$x, \quad y$
cuya suma sea 78 y cuyo	$x + y = 78$
producto sea 1296	$xy = 1296$

En este caso, el enunciado se divide casi automáticamente en partes sucesivas, cada una de las cuales puede transcribirse de inmediato en símbolos matemáticos.

3. *Encontrar la longitud de la base y la altura de un prisma de base cuadrada conociendo su volumen, 63 cm³, y su superficie, 102 cm².*

¿Cuáles son las incógnitas? El lado de la base, sea x, y la altura del prisma, sea y.

¿Cuáles son los datos? El volumen, 63 cm³, y el área, 102 cm².

¿Cuál es la condición? El prisma cuya base es un cuadrado de lado x y cuya altura es y, debe tener un volumen de 63 cm³ y una superficie de 102 cm².

Distinguir las diversas partes de la condición. Existen dos partes, una relativa al volumen, y otra a la superficie.

Casi automáticamente nos limitaremos a considerar, a fin de dividir la condición completa, estos dos únicos elementos; pero no podremos escribirlas "inmediatamente". Debemos saber en principio cómo calcular el volumen y las diversas partes de la superficie. Sin embargo, si nuestros conocimientos de geometría son suficientes, podemos fácilmente formular de distinto modo las dos partes de la condición, de modo de hacer posible el planteo de la ecuación. Para tal fin, escribamos sobre el lado izquierdo de la página el enunciado del problema presentado en forma diferente y más desarrollado a fin de poderlo traducir al lenguaje algebraico

Determinar el lado de la base	x
y la altura	y
de un prisma de base cuadrada.	
1º El volumen es dado.	63
La superficie de la base que es un cuadrado de lado x	x^2
y la altura	y
determinar el volumen, que es el producto.	$x^2 y = 63$
2º La superficie es dada.	102
Consiste en dos cuadrados de lado x	$2x^2$
y en cuatro rectángulos de base x y altura y	$4xy$
cuya suma constituye la superficie.	$2x^2 + 4xy = 102$

4. *Conociendo la ecuación de una recta y las coordenadas de un punto, determinar el punto simétrico al punto dado con relación a la recta dada.* Se trata aquí de un problema de geometría analítica plana.

¿Cuál es la incógnita? Un punto de coordenadas p y q.

¿Cuáles son los datos? La ecuación de una recta, digamos $y = mx + n$, y un punto de coordenadas a, b.

¿Cuál es la condición? Los puntos (a, b) y (p, q) son simétricos con respecto a la recta $y = mx + n$.

Aquí se plantea la dificultad esencial consiste en dividir la condición en diversas partes cada una de las cuales puede expresarse en el lenguaje de la geometría analítica. Es necesario comprender bien la naturaleza de dicha dificultad. Una descomposición de la condición en elementos puede no presentar ninguna objeción desde el punto de vista lógico, pero puede resultar totalmente inútil. Lo que se requiere aquí es descomponerla en elementos que permitan la expresión analítica. Para obtener dicha descomposición tenemos que *referirnos a la definición* de simetría, pero teniendo presentes los recursos de la geometría analítica. ¿Qué se entiende por simetría respecto de una recta? ¿Qué relaciones geométricas podemos expresar de modo simple en geometría analítica? Concentrémonos en la primera pregunta, pero sin olvidar la segunda. Así llegamos a encontrar la descomposición que vamos a formular.

El punto dado	(a, b)
y el punto que se busca	(p, q)
están en una relación tal que:	
1º La recta que los une es perpendicular a la recta dada;	$\dfrac{q-b}{p-a} = -\dfrac{1}{m}$
2º El punto medio del segmento que los une se halla sobre la recta dada.	$\dfrac{b+q}{2} = m\dfrac{a+p}{2} + n$

¿Podría enunciar el problema en forma diferente? ¿Podría nuevamente enunciarlo en otra forma? Estas preguntas tienen por objeto obtener una VARIACIÓN DEL PROBLEMA, página 193.

Refiérase a las definiciones. Véase DEFINICIÓN, página 67.

¿Podría deducir de los datos algún elemento útil? Estamos ante un problema no resuelto, ante una pregunta. Tenemos que *determinar la relación entre los datos y la incógnita.* Podemos representarnos el problema

como un espacio virgen entre los datos y la incógnita, o como un abismo sobre el cual hay que tender un puente. Podemos comenzar la construcción de dicho puente a partir de cualquiera de los lados, es decir, de los datos o de la incógnita.

Mire bien la incógnita. Trate de pensar en un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar. Esta frase nos sugiere comenzar el trabajo a partir de la incógnita.

Mire bien los datos *¿Podría deducir de los datos algún elemento útil?* Esta frase, por el contrario, nos sugiere comenzar el trabajo a partir de los datos.

En general parece preferible comenzar el razonamiento a partir de la incógnita (véase PAPPUS y RAZONAMIENTO REGRESIVO). Sin embargo, el comenzar a partir de los datos ofrece también posibilidades de éxito. Debiéndose ensayar con frecuencia este punto de partida, vamos a ilustrarlo por medio de un ejemplo.

Ejemplo. Dados tres puntos A, B, C, trazar una recta que pase por A entre B y C y que esté a igual distancia de B y de C.

¿Cuáles son los datos? Tres puntos A, B, C, de los cuales se da la posición. *Tracemos una figura* haciendo aparecer dichos datos (fig. 17).

B

A

C

FIG. 17

¿Cuál es la incógnita? Una recta.

¿Cuál es la condición? La recta requerida pasa por A entre B y C, a igual distancia de esos dos puntos. Reunamos los datos y la incógnita en una figura que haga ver las relaciones requeridas (fig. 18). Esta figura, sugerida por la *definición* de distancia de un punto a una recta, muestra los ángulos rectos implícitos en dicha definición.

Sin embargo, la figura así trazada resulta aún "muy vacía". La recta desconocida está relacionada de forma poco satisfactoria con los datos A, B y C. La figura requiere alguna línea auxiliar, hay que añadirle algo. ¿Pero qué? Incluso un buen alumno puede desorientarse en este momento. Puede,

claro está, intentar varios caminos, pero el mejor medio de encauzarlo es la siguiente pregunta: *¿Podría deducir de los datos algún elemento útil?*

De hecho, ¿cuáles son los datos? Los tres puntos exhibidos en la figura 17, nada más. No hemos utilizado todavía suficientemente los puntos

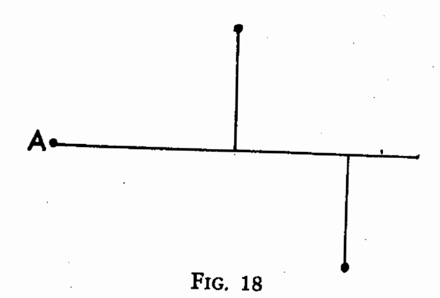


FIG. 18

B y *C;* hay que deducir algo útil de ellos. ¿Pero qué hacer con dos puntos solamente? Unirlos por una recta. Trazamos, pues, la figura 19.

Si superponemos las figuras 18 y 19, la solución aparece de inmediato. En efecto, obtenemos dos triángulos rectángulos que son semejantes y un nuevo punto de intersección de una importancia capital. (iguales)

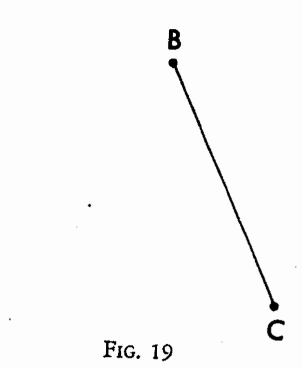


FIG. 19

¿Por qué las demostraciones? Se cuenta de Newton una anécdota clásica. Joven estudiante, comenzó el estudio de la geometría, como era costumbre en su tiempo, por la lectura de los Elementos de Euclides. Leyó los teoremas, constató su exactitud y omitió las demostraciones, preguntándose por qué se tomaban tantas molestias en demostrar verdades tan evidentes. Años más tarde, sin embargo, cambió de parecer y fue un admirador de Euclides.

Auténtica o no, esta anécdota nos lleva a la pregunta siguiente: ¿por qué aprender o enseñar las demostraciones? ¿Qué vale más, nada demostrar,

demostrarlo todo o demostrar en parte? Y si sólo se dan algunas demostraciones, ¿cómo escogerlas?

1. *Demostraciones completas.* Para ciertos lógicos sólo existen las demostraciones completas. Las así denominadas no deben tener ninguna laguna, ninguna falla, ninguna incertidumbre de ninguna especie; de lo contrario, no es una demostración. ¿Existen, en la vida diaria, en el proceso de los tribunales, en la física, demostraciones completas según dicha definición? En realidad no. Es, pues, difícil de comprender cómo podríamos adquirir la noción de una demostración tan rigurosamente concebida.

Podemos decir, exagerando un poco, que tal idea es debida a un hombre y a un libro: Euclides y sus Elementos. En todo caso, incluso hoy en día, el estudio de los elementos de la geometría plana es el que suministra la mejor oportunidad de adquirir la noción de la demostración rigurosa.

Tomemos como ejemplo la demostración del teorema: *En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°.** La figura 20, que es parte integrante de nuestro equipaje intelectual, necesita poca explicación.

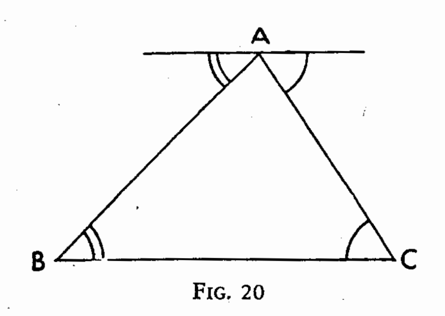


FIG. 20

Se ha trazado por el vértice *A* una paralela al lado *BC*. Los ángulos en *B* y *C* son respectivamente iguales a los dos ángulos exteriores formados en *A,* en virtud de la igualdad de los ángulos alternos internos comprendidos entre paralelas. Así pues, los tres ángulos del triángulo son iguales a los tres ángulos que tienen por vértice común el vértice *A* y forman un ángulo llano equivalente a dos ángulos rectos. El teorema queda así demostrado.

Si un alumno termina sus estudios de matemáticas sin haber comprendido realmente las demostraciones de este tipo, estará en su derecho al recriminar a sus profesores. De hecho, debemos clasificar las cosas según su importancia. Si dejamos que un alumno ignore tal o cual hecho particular de geometría, no importa gran cosa, dado que probablemente no se

* En la proposición 32 del Libro I de los Elementos de Euclides. La demostración que sigue no es de Euclides, pero era conocida de los griegos.

tenga que valer nunca de ello; pero si descuidamos el enseñarle las demostraciones geométricas, ignorará los mejores y más sencillos ejemplos de la demostración exacta y perderá la mejor ocasión de su vida para adquirir la noción de lo que es un razonamiento riguroso. Falto de esta noción, adolecerá siempre de la falta de un punto de comparación para juzgar el valor de las "demostraciones" que le propondrá la vida moderna.

En suma, si la educación tiende a dar al alumno la noción de la demostración intuitiva y del razonamiento lógico, deberá reservar un lugar a las demostraciones geométricas.

2. *Sistema lógico.* La geometría, tal como se presenta en los Elementos de Euclides, no es un simple conjunto de hechos, sino un sistema lógico. Los axiomas, las definiciones y proposiciones no están agrupadas al azar, sino dispuestas en un orden perfecto. Cada proposición ocupa un lugar de tal suerte que resulta de los axiomas, de las definiciones y de las proposiciones precedentes. Se puede considerar esta disposición como el principal logro de Euclides y dicho sistema lógico como el mérito esencial de sus Elementos.

La geometría de Euclides no es solamente un sistema lógico, es el primero y el más grande ejemplo de este género de sistema que otras ciencias han tratado —y tratan todavía— de imitar. En cuanto a las que están más alejadas de la geometría, como la psicología y la jurisprudencia, ¿incluso ellas deben plegarse a dicha lógica rígida? La pregunta es discutible, pero nadie puede participar en el debate competentemente sin estar familiarizado con el sistema euclideano.

Ahora bien, el sistema descansa sobre demostraciones. Cada proposición está ligada por una demostración a los axiomas, a las proposiciones, a las definiciones que la preceden. Si no hemos asimilado esta manera de demostración, no podemos comprender la esencia misma del sistema.

En resumen, si la educación tiende a dar al alumno la noción del sistema lógico, debe reservar un lugar a las demostraciones geométricas.

3. *Sistema mnemotécnico.* Es creencia del autor que las nociones de la demostración intuitiva, del razonamiento riguroso, del sistema lógico son recomendables en la mayoría de los casos. Hay, sin embargo, casos en los cuales el estudio de dichas nociones no se considera absolutamente necesario, sea por falta de tiempo sea por alguna otra razón. Pero, aun entonces, puede ser deseable conocer las demostraciones.

Estas suministran la demostración intrínseca, permiten al sistema lógico formar un todo, y nos ayudan a recordar las diversas componentes de este todo. Tomemos el ejemplo tratado aquí antes (fig. 20). Dicha figura pone en evidencia el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo vale 180°, relacionando este hecho con el de la igualdad de los ángulos

alternos internos. Los hechos relacionados entre sí son más interesantes y más fáciles de retener que los hechos aislados. Así pues, la figura fija en nuestra mente dos proposiciones geométricas relacionadas y, finalmente, la figura y las proposiciones acaban formando parte de nuestro equipaje intelectual.

Vayamos ahora al caso en que no se pretende adquirir ideas generales, sino fijar solamente ciertos puntos. Incluso en casos de ese tipo, los hechos deben ser presentados unos con relación a otros, en una especie de síntesis, dado que es más difícil retener detalles aislados, pues se olvidan fácilmente. Cualquiera que sea la relación que una los hechos de modo sencillo, natural y durable, será bienvenida. Tal sistema no necesita basarse en la lógica, pero debe solamente concebirse de un modo que ayude eficazmente a la memoria; debe ser *mnemotécnico*. Añadamos que, incluso en un sistema puramente mnemotécnico, las demostraciones pueden ser útiles, sobre todo si son sencillas. Por ejemplo, el alumno debe aprender el teorema relativo a la suma de los ángulos de un triángulo y el de los ángulos alternos internos. ¿Existe algún procedimiento más simple, más natural o más eficaz que el de la figura 20, para fijar estos dos hechos?

Resumiendo, aun sin dar particular importancia a las ideas lógicas generales, las demostraciones pueden ser útiles tanto como el procedimiento mnemotécnico.

4. *Sistema de recetario de cocina.* Hemos expuesto las ventajas de las demostraciones, pero nos hemos cuidado bien de no recomendarlas como una panacea universal. Existen, en efecto, casos en los que es prácticamente imposible utilizarlas, por ejemplo, el de la enseñanza del cálculo diferencial e integral a los alumnos de ingeniería.

Para presentarse con un rigor conforme a las exigencias modernas, el cálculo infinitesimal exige demostraciones relativamente difíciles y sutiles ("demostraciones épsilon"). Sin embargo, los ingenieros lo estudian en vista de su aplicación y no tienen ni suficiente tiempo ni suficiente práctica ni suficiente interés para debatirse en demostraciones largas o apreciar sutilezas. En tales casos se tiende a suprimir todas las demostraciones; pero, haciendo esto, se reduce el cálculo infinitesimal al nivel de un recetario de cocina.

El libro de cocina da una descripción detallada de los ingredientes y del procedimiento, pero no da razones ni demostraciones que fundamenten sus indicaciones o recetas; la demostración del "pudding" reside en su sabor. El libro de cocina responde desde luego a la perfección a su propósito; no necesita apoyarse sobre ningún sistema lógico o mnemotécnico dado que sus recetas se escriben o se imprimen y no están destinadas a aprenderse de memoria.

Otra suerte corre el autor de un texto de cálculo infinitesimal o el profesor universitario; ninguno de ellos logrará su propósito si siguen de cerca el sistema del libro de cocina. Si expone métodos sin demostrar, sin motivar, dichos métodos no serán comprendidos; si da reglas sin explicar, sin relaciones entre ellas, se olvidarán rápidamente. La matemáticas no se pueden demostrar a la manera de un "pudding"; si se excluyen todas las formas de razonamiento, un curso de cálculo infinitesimal se convertirá en una especie de inventario incoherente, sin la menor posibilidad de suministrar información alguna.

5. *Demostraciones incompletas.* El mejor modo de resolver el dilema que se plantea entre la demostración demasiado larga y el libro de cocina podría consistir en utilizar —sin exceso— la demostración incompleta.

Para un lógico estricto, una demostración incompleta no es demostración. Y claro está, las demostraciones incompletas deben distinguirse cuidadosamente de las completas; confundirlas está mal, hacer pasar una por otra es peor. Es penoso ver al autor de un texto presentar una demostración incompleta de manera ambigua, vacilando visiblemente entre la vergüenza y el deseo de hacer creer que la demostración es completa. Las demostraciones incompletas, sin embargo, pueden ser útiles cuando se las emplea adecuadamente y con buen gusto; tienen por objeto no el sustituir las demostraciones completas —lo cual no es posible— sino el dar a una exposición interés y coherencia.

Ejemplo 1. Una ecuación algebraica de grado n *tiene exactamente* n *raíces.* Esta proposición, llamada por Gauss el Teorema Fundamental del Algebra, ha de presentarse con frecuencia a alumnos no preparados para comprender la demostración. Saben, sin embargo, *que una ecuación de primer grado tiene una raíz* y que *una de segundo grado tiene dos.* Por otra parte esa proposición comprende una parte fácil de demostrar: *ninguna ecuación de grado* n *tiene más de* n *raíces diferentes.*

¿Constituyen los hechos mencionados una demostración completa del Teorema Fundamental? De ningún modo. Bastan sin embargo, para presentarlo de un modo interesante y plausible y para fijarlo en la mente de los alumnos, lo que es esencial.

Ejemplo 2. La suma de dos ángulos formados por las aristas de un ángulo triedro es superior al tercero. Es evidente que el teorema se reduce a afirmar que *en un triángulo esférico la suma de dos lados es superior al tercero.* Hecha esta observación, pensamos naturalmente en la analogía entre el triángulo esférico y el triángulo rectilíneo. ¿Dichas observaciones constituyen una demostración? De ningún modo, pero nos ayudan a comprender el teorema propuesto y recordarlo.

El primer ejemplo presenta un interés histórico. Durante 250 años aproximadamente, los matemáticos creyeron en el Teorema Fundamental, sin conocer la demostración perfecta, de hecho sin mayores bases que las mencionadas aquí. El segundo ejemplo muestra que la ANALOGÍA es una fuente importante de hipótesis. En las matemáticas, como en las ciencias naturales y físicas, el descubrimiento nace a menudo de la observación, la analogía y la inducción. Esos medios, empleados con cautela para poner en pie un razonamiento heurístico plausible, son particularmente del gusto del físico y del ingeniero. (Véase INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, 1, 2, 3.)

El papel e interés de las demostraciones incompletas se explican en parte en nuestro estudio de la solución. Una cierta experiencia del modo de resolver los problemas muestra que la primera idea de una demostración es con frecuencia incompleta. La observación esencial, la relación principal, el germen de la demostración, pueden haberse encontrado, pero los detalles a menudo difíciles no vienen sino después. Algunos autores tienen el don de no presentar más que el germen de la demostración, la idea principal bajo la forma más simple e indicar la naturaleza de los detalles restantes. Tales demostraciones, pese a lo incompleto, pueden ser mucho más instructivas que una demostración presentada en todos sus detalles.

Resumamos: las demostraciones incompletas pueden servir de procedimiento mnemotécnico (pero, claro está, sin pretender sustituir a las demostraciones completas) cuando se busca una cierta coherencia de presentación y no un encadenamiento lógico riguroso.

Es muy peligroso hacer elogios de las demostraciones incompletas. Se pueden evitar posibles abusos observando algunas reglas. En primer lugar, si la demostración es incompleta, hay que señalarlo en alguna parte, de un modo o de otro. Después, ningún autor o profesor tiene el derecho de presentar una demostración incompleta de un teorema si no conoce muy bien la demostración completa.

Por lo demás se puede confesar que no es fácil el presentar en forma elegante una demostración incompleta.

Problema auxiliar. Es un problema que consideramos no por su propio interés, sino porque esperamos que su estudio nos ayude a resolver otro problema, el original. El problema original es un fin que queremos alcanzar, el problema auxiliar es un medio por el cual tratamos de alcanzarlo.

Un insecto intenta una y otra vez escaparse a través de un vidrio de la ventana y no trata de hacerlo por la siguiente ventana que, sin embargo, está abierta y por la cual se introdujo en el cuarto. Un hombre debe ser capaz de actuar más inteligentemente. La superioridad del hombre consiste en rodear un obstáculo que no puede ser vencido directamente, en recurrir a un problema auxiliar conveniente cuando el problema original parece insoluble. El imaginar tal problema auxiliar es una operación impor-

tante de la mente. Suscitar un nuevo problema claro y conciso subordinado a otro, concebir distintamente como fin en sí lo que es medio para otra finalidad, es una realización refinada de la inteligencia. Es, pues, un deber importante aprender (o enseñar) la manera de servirse inteligentemente de los problemas auxiliares.

1. *Ejemplo.* Determinar x, tal que satisfaga la ecuación

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Si observamos que $x^4 = (x^2)^2$ podemos ver la ventaja de introducir

$$y = x^2$$

Obtenemos entonces un nuevo problema. Determinar y, tal que satisfaga la ecuación

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

El nuevo problema es un problema auxiliar. Intentamos emplearlo como medio para resolver nuestro problema original. La incógnita y del problema auxiliar, recibe lógicamente el nombre de *incógnita auxiliar.*

2. *Ejemplo.* Determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular dadas las longitudes de las tres aristas que parten de un mismo vértice.

Tratando de resolver este problema (sección 8) podemos llegar, por analogía (sección 15), a otro problema: Determinar la diagonal de un paralelogramo rectangular dadas las longitudes de dos de sus lados que parten del mismo vértice.

El nuevo problema es auxiliar. Lo consideraremos dado que esperamos deducir de él algo de provecho para el problema original.

3. *Ventajas.* Las ventajas que obtenemos de la consideración de un problema auxiliar pueden ser de varios géneros. Podemos, en principio, utilizar el *resultado* del problema auxiliar. Así, en el ejemplo 1, tras encontrar, resolviendo la ecuación de segundo grado en y, que y es igual a 4 ó a 9, deducimos que $x^2 = 4$ ó $x^2 = 9$, de donde se determinan todos los valores posibles de x. En otros casos, podemos utilizar el *método* de un problema auxiliar. Así, en el ejemplo 2, el problema auxiliar es un problema de geometría plana, análogo al problema original que es un problema de geometría del espacio, pero más sencillo. Es, pues, razonable introducir un problema auxiliar de este género en la esperanza que será instructivo, que nos permitirá la familiaridad con ciertos métodos, operaciones, herramientas que podremos utilizar más tarde en el problema original. En el ejemplo 2, la elección del problema auxiliar es particularmente afortunada; examinándolo bien, vemos, en efecto, que podemos utilizar tanto su método como su resultado. (Ver sección 15, y, ¿HA EMPLEADO USTED TODOS LOS DATOS?)

4. *Peligros.* El tiempo y esfuerzo dedicados al problema auxiliar se los estamos quitando al problema original.

Si la investigación del problema auxiliar falla, pueden perderse el tiempo y el esfuerzo que se le dedicaron. Por ello debemos tener buen juicio al elegir un problema auxiliar. Podemos tener varias buenas razones para nuestra elección. El problema auxiliar puede parecer más accesible que el problema original; puede parecer instructivo o puede tener una especie de atracción estética. A veces, la sola ventaja del problema auxiliar es que es nuevo y ofrece posibilidades inexploradas. Lo elegimos dado que estamos cansados del problema original, en el cual todos los intentos de acercamiento parecen haber fracasado.

5. *Cómo encontrar el problema.* El descubrimiento de la solución del problema propuesto depende con frecuencia del descubrimiento de un problema auxiliar apropiado. Desgraciadamente no existe un método infalible para encontrar problemas auxiliares adecuados como tampoco existe un método infalible para descubrir la solución. Existen, sin embargo, preguntas y sugerencias que son a menudo de provecho, como por ejemplo: MIRE LA INCÓGNITA. Con frecuencia nos guía también el descubrimiento de problemas auxiliares útiles una VARIACIÓN DEL PROBLEMA, página 193.

6. *Problemas equivalentes.* Dos problemas son *equivalentes* si la solución de uno implica la del otro. Así, en el ejemplo 1, el problema original y el problema auxiliar son equivalentes.

Considérense los siguientes teoremas:

A. En todo triángulo equilátero, cada ángulo mide 60°.

B. En todo triángulo equiángulo, cada ángulo mide 60°.

Estos dos teoremas no son idénticos. Contienen diferentes nociones. Uno concierne a la igualdad de los lados de un triángulo, el otro a la igualdad de los ángulos. Pero cada uno de ellos se deduce del otro. Por lo tanto, el problema que consiste en demostrar A es equivalente al problema que consiste en demostrar B.

Si se requiere demostrar A, existe cierta ventaja en la introducción, como problema auxiliar, del problema que consiste en demostrar B. El teorema B es, en efecto, un poco más fácil de demostrar que el teorema A, y lo más importante es que podemos *prever* que B es más fácil que A; podemos, pues, juzgarlo; podemos desde el principio considerar como plausible el hecho de que B es más sencillo que A. De hecho, el teorema B, concerniente sólo a los ángulos, es más "homogéneo" que el teorema A que concierne tanto a los ángulos como a los lados.

El paso del problema original al problema auxiliar se llama reducción *convertible* o reducción *bilateral,* o también reducción *equivalente,* en el caso en que los dos problemas sean equivalentes. Así, la reducción de A

a B (ver lo anterior) es convertible, siéndolo también la reducción del ejemplo 1. Las reducciones convertibles son, en cierto aspecto, más importantes y más deseables que otros modos de introducir problemas auxiliares; pero aun problemas auxiliares que no son equivalentes al problema original pueden ser también de gran utilidad (véase el ejemplo 2).

7. *Cadenas de problemas auxiliares equivalentes* son frecuentes en el razonamiento matemático. Si se nos pide resolver un problema A, podemos, sin ver la solución, descubrir que A es equivalente a otro problema B. Considerando B podemos llegar a un tercer problema C equivalente a B. Procediendo del mismo modo, reducimos C a D y así sucesivamente, hasta llegar a un último problema L cuya solución es conocida o inmediata. Cada problema siendo equivalente al anterior, el último problema L debe ser equivalente al problema original A. Así pues, estamos en condiciones de deducir la solución del problema original A a partir del problema L, el cual constituye el último eslabón de una cadena de problema auxiliares.

Cadenas de problemas de este tipo fueron observadas por los matemáticos griegos, como lo podemos ver en un pasaje importante de PAPPUS. A modo de ilustración, consideremos de nuevo el ejemplo 1. Llamemos (A) la condición impuesta a la incógnita x:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0. \qquad \text{(A)}$$

Una forma de resolver el problema es transformando la condición propuesta en otra condición que llamaremos (B):

$$(2x^2)^2 - 2(2x^2)\,13 + 144 = 0. \qquad \text{(B)}$$

Obsérvese que las condiciones (A) y (B) son diferentes. Si bien son ligeramente diferentes, por decirlo así, son con toda seguridad equivalentes, como nos podemos convencer fácilmente en definitiva; pero no son idénticas. El paso de (A) a (B) no sólo es correcto, sino que tiene además un claro propósito, obvio para todo aquel que esté familiarizado con ecuaciones de segundo grado. Continuando en la misma dirección, transformamos la condición (B) en otra nueva condición (C):

$$(2x^2)^2 - 2(2x^2)\,13 + 169 = 25. \qquad \text{(C)}$$

Procediendo del mismo modo, obtenemos:

$$(2x^2 - 13)^2 = 25 \qquad \text{(D)}$$

$$2x^2 - 13 = \pm 5 \qquad \text{(E)}$$

$$x^2 = \frac{13 \pm 5}{2} \qquad \text{(F)}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}} \qquad \text{(G)}$$

$$x = 3, \quad x = -3, \quad x = 2, \quad x = -2 \qquad \text{(H)}$$

Cada una de las reducciones que acabamos de hacer era reversible. Así pues, la última condición (H) es equivalente a la primera (A) y así, 3, − 3, 2, − 2 son todas las posibles soluciones de la ecuación original.

En el ejemplo precedente, hemos derivado de una condición original (A) una serie de condiciones (B), (C), (D), . . . , cada una de las cuales era equivalente a la anterior. Esta circunstancia hace necesario un cuidado extremo. Se trata de los mismos objetos que satisfacen a condiciones equivalentes. Por lo tanto, si pasamos de una condición propuesta a una nueva equivalente, la solución es la misma. Pero si pasamos de una condición propuesta a otra más restringida, perdemos posibles soluciones; y si pasamos a una condición más extensa, admitimos soluciones impropias, soluciones no adecuadas al problema propuesto. Si en una serie de reducciones sucesivas, pasamos de una condición a otra más restringida y luego a otra más extensa, corremos el riesgo de perder por completo el camino del problema original. A fin de evitar este peligro, debemos comprobar con cuidado la naturaleza de cada nueva condición introducida: ¿Es equivalente a la condición original? Esta pregunta es aún más importante cuando se trata no de una sola ecuación, como en el presente caso, sino de un sistema de ecuaciones o cuando la condición no se expresa por medio de ecuaciones, como por ejemplo en los problemas de construcción geométrica.

(Compárense con PAPPUS, especialmente los comentarios 2, 3, 4, 8. La descripción de la pág. 134, último párrafo, es innecesariamente restringida; describe una cadena de "problemas por resolver" cada uno de los cuales tiene diferente incógnita. El ejemplo considerado aquí presenta la particularidad exactamente opuesta: todos los problemas de la cadena tienen la misma incógnita y difieren solamente en la forma de la condición. Es evidente que tales restricciones no son necesarias.)

8. *Reducción unilateral.* Sean A y B dos problemas no resueltos. Si pudiésemos resolver A, podríamos deducir la solución de B. Pero no inversamente: si pudiésemos resolver B, obtendríamos, posiblemente, alguna información acerca de A, pero no sabríamos cómo deducir su solución a partir de la de B. En un caso así, el proceso más rápido consiste en resolver A en lugar de B. Diremos que, de los dos problemas, A es el *más ambicioso* y B el *menos ambicioso*.

Si de un problema propuesto pasamos a un problema auxiliar más o menos ambicioso, llamamos a dicho paso una *reducción unilateral*. Hay dos tipos de reducciones unilaterales y ambas son, de una forma o de otra, más peligrosas que una reducción bilateral o convertible.

El ejemplo 2 muestra una reducción unilateral a un problema menos ambicioso. De hecho, si podemos resolver el problema original, relativo a un paralelepípedo cuya longitud, ancho y alto son a, b, c, respectivamente,

podemos pasar al problema auxiliar haciendo $c = 0$ obteniéndose un paralelogramo de longitud a y ancho b. Para otro ejemplo de reducción unilateral a un problema menos ambicioso, véase PARTICULARIZACIÓN, 3, 4, 5. Esos ejemplos muestran que, con un poco de suerte, podemos estar en condiciones de utilizar un problema auxiliar menos ambicioso como un *trampolín,* combinando la solución de dicho problema con algunas observaciones suplementarias pertinentes, a fin de obtener la solución del problema original.

La reducción unilateral a un problema más ambicioso puede también ser de provecho. (Véase GENERALIZACIÓN 2, y la reducción del primer problema al segundo consideradas en INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, 1, 2.)

En suma, un problema más ambicioso puede ser más accesible; es el caso de la PARADOJA DEL INVENTOR, página 138.

El profesor de matemáticas tradicional. La leyenda quiere que sea distraído.Es costumbre presentarlo con un paraguas bajo el brazo. No se le imagina más que cara al pizarrón, dando la espalda a la clase, escribiendo *a,* diciendo *b,* pensando en *c* cuando se trata de *d.* De generación en generación se transmiten los más típicos dichos que se le atribuyen, como por ejemplo:

"Para resolver esta ecuación diferencial, no tienen más que mirarla hasta que se les ocurra la solución."

"Este principio es tan perfectamente general que no tiene ninguna aplicación concreta."

"La geometría es el arte de razonar correctamente sobre figuras incorrectas."

"Mi método para superar una dificultad consiste en evitarla."

"¿Cuál es la diferencia entre método y artificio? Un método es un artificio del cual nos servimos dos veces."

Después de todo, algo podemos aprender de este tradicional profesor de matemáticas. Esperemos que el profesor de matemáticas de quien tú nada puedes aprender no se convierta en el tradicional.

Progreso y logro. ¿Ha progresado usted? ¿Cuál es el logro esencial? He ahí una pregunta que nos podemos formular cuando resolvemos un problema o podemos formulársela a un alumno cuyo trabajo dirigimos. Así nos acostumbramos a juzgar con mayor o menor seguridad los progresos y los logros en los casos concretos. El paso por dar después para pasar de dichos casos concretos a una descripción general no es del todo cómodo. Y sin embargo, hay que darlo si queremos llevar suficientemente lejos el estudio de la heurística y sacar en claro lo que constituye en general el progreso y logro en el transcurso de la solución de un problema.

1. Para resolver un problema tenemos que tener cierto conocimiento del tema, elegir exactamente entre todos nuestros conocimientos —muchos de los cuales no son más que latentes— lo que necesitamos. Nuestra concepción del problema es mucho más rica al final que al principio de esta elección. ¿Qué le hemos, pues, añadido? Lo que hemos logrado sacar de la memoria. Para obtener la solución, hemos debido acordarnos de diversos hechos esenciales, acordarnos de problemas anteriormente resueltos, de teoremas conocidos, de definiciones si se trata de un problema de matemáticas. Podemos llamar *movilización* al acto que consiste en extraer de la memoria los elementos apropiados.

2. Sin embargo, para resolver un problema no basta recordar hechos aislados, hay que combinarlos entre sí adaptándolos al problema propuesto. En la solución de un problema matemático, por ejemplo, hay que construir, con la ayuda del material aportado por la memoria, un razonamiento perfectamente adaptado a la situación. Dicha actividad de adaptación y combinación, puede llamarse *organización.*

3. De hecho no es posible en realidad separar la movilización y la organización. Si se dedica a un problema una cierta concentración mental, la memoria no intervendrá más que en favor de hechos más o menos ligados al propósito que se persigue y no se tendrán que ligar y organizar más que materiales de los que nos hemos acordado y que hemos movilizado.

La movilización y la organización no son más que dos *aspectos* de un mismo proceso complejo que además tiene muchos otros.

4. Otro aspecto del programa de nuestro trabajo es el hecho de que nuestro *modo de concepción cambia.* Enriquecido por todo el material del que nos hemos acordado, que hemos adaptado y que hemos hecho entrar en juego, nuestra concepción del problema es mucho más amplia al final que al principio. Deseando pasar de la concepción inicial a otra más adecuada, mejor adaptada, probamos diversos puntos de vista considerando el problema bajo diferentes ángulos. No podemos prácticamente hacer progreso alguno sin una VARIACIÓN DEL PROBLEMA, página 193.

5. A medida que progresamos hacia el objetivo final, lo vemos cada vez más claro, lo que nos lleva a suponer que nos acercamos a él. A medida que avanzamos en el examen del problema, *prevemos* cada vez más claramente lo que hay que hacer para llegar a la solución y cómo hay que hacerlo. Al resolver un problema matemático, se puede prever, con un poco de suerte, que se puede emplear tal teorema conocido, que puede ser útil considerar tal problema ya resuelto, o necesario referirse al significado de tal término técnico. Estas previsiones no son absolutamente seguras sino más o menos plausibles. No alcanzaremos la certeza sino después de haber obtenido la solución completa; pero antes de llegar ahí, con frecuencia de-

beremos conformarnos con hipótesis. No podríamos nunca, sin hacer un llamado a consideraciones simplemente plausibles y provisionales, llegar a la solución que es certera y última. Necesitamos un RAZONAMIENTO HEURÍSTICO, página 173.

6. ¿Qué es el progreso en la marcha hacia la solución? Es el avance de la movilización y la organización de nuestros conocimientos, una evolución de nuestra concepción del problema, una previsión creciente de las etapas que constituirán el razonamiento final. El avance puede ser lento, imperceptible, pero por momentos su velocidad crece bruscamente, a saltos. Este progreso repentino hacia la solución se llama una IDEA BRILLANTE, una buena idea, un hallazgo (en alemán existe un término más técnico: *Einfall*). ¿Qué es una idea brillante? Es una transformación brusca y esencial de nuestro punto de vista, una reorganización repentina de nuestro modo de concebir el problema, una previsión de las etapas que nos llevarán a la solución, previsión en la cual, pese a su aparición repentina, presentimos que nos podemos fiar.

7. Las consideraciones precedentes constituyen el trasfondo de las preguntas y sugerencias de nuestra lista.

Gran número de esas preguntas y sugerencias tienen por objeto directo la *movilización* de los conocimientos anteriormente adquiridos. *¿Lo ha visto ya? O bien ¿ha visto el mismo problema bajo una forma ligeramente diferente? ¿Conoce algún problema relacionado? ¿Conoce algún teorema que le podría ser útil? Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.*

Existen situaciones típicas en las que creemos haber reunido el material conveniente y en las que buscamos *organizar* mejor lo que hemos movilizado: *He aquí un problema que se relaciona al suyo y que usted ha resuelto ya. ¿Podría emplearlo?; ¿podría utilizar su resultado?; ¿su método?; ¿le hace falta introducir algún elemento auxiliar para poder utilizarlo?*

Existen otras situaciones, igualmente típicas en las cuales consideramos no haber reunido aún suficiente material. Nos preguntamos qué falta: *¿Ha utilizado todos los datos? ¿La condición es completa? ¿Ha tenido usted en cuenta todas las nociones esenciales que comportaba el problema?*

Ciertas preguntas tienen por objeto directo la *variación* del problema: *¿Podría enunciar el problema de modo diferente?; ¿podría enunciarlo todavía en otra forma?* Muchas preguntas tienden a hacer variar el problema por medio de procedimientos particulares, como el referirse a la DEFINICIÓN, emplear la ANALOGÍA, la GENERALIZACIÓN, la PARTICULARIZACIÓN, como también DESCOMPONER Y RECOMPONER EL PROBLEMA.

Otras preguntas sugieren el intento de *anticipar* la naturaleza de la solución buscada: *¿Es posible satisfacer la condición?; ¿es suficiente la condición para determinar la incógnita?; ¿es insuficiente?; ¿redundante?; ¿contradictoria?*

Las preguntas y sugerencias de nuestra lista no mencionan la *idea brillante*, pero de hecho todas apuntan a dicha idea. Al comprender el problema nos preparamos, en efecto, a dicha idea; buscando un plan, tratamos de provocarla; después de provocarla la aplicamos; mirando hacia atrás sobre la forma y el resultado de la solución, tratamos de explotarla a fondo.*

Problemas por resolver, problemas por demostrar. Nos proponemos establecer un paralelismo entre estos dos tipos de problemas.

1. El propósito de un "problema por resolver" es descubrir cierto objeto, la incógnita del problema.

La incógnita recibe también el nombre de "quaesitum", o lo que se busca, o lo que se pide. Los "problemas por resolver" pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos; son problemas serios o simples acertijos. Podemos buscar incógnitas de todo tipo, tratar de encontrar, de obtener, de adquirir, de producir o construir todos los objetos imaginables. En una novela policiaca, la incógnita es el asesino; en el ajedrez, una jugada; en ciertos enigmas, una palabra; en ciertos problemas elementales de álgebra, un número; en una construcción geométrica, una figura.

2. El propósito de "un problema por demostrar" consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada.

Un testigo que afirme que el acusado se hallaba en casa cierta noche, obliga al juez a investigar si dicha afirmación es verdadera y a justificar su opinión sobre bases tan sólidas como sea posible. Se trata, para el juez, de un "problema por demostrar". La "demostración del teorema de Pitágoras" constituye otro de esos problemas; pero aquí no decimos "demostrar o refutar el teorema de Pitágoras". Quizá fuese mejor, bajo ciertos aspectos, incluir en el enunciado del problema la posibilidad de refutarlo, pero la descartamos a conciencia dado que las posibilidades de refutar el teorema de Pitágoras son mínimas.

3. Los principales elementos de un "problema por resolver" son, la *incógnita*, los *datos* y la *condición*.

Si tenemos que construir un triángulo de lados a, b, c, la incógnita es un triángulo, los datos son las tres magnitudes a, b y c y la condición es que los lados del triángulo por construir tengan, respectivamente, esas magnitudes. Si tenemos que construir un triángulo cuyas alturas son a, b y c, la incógnita es un objeto de la misma categoría que el anterior, los datos

* Varios de estos puntos se tratan más a fondo en el artículo del autor, *Acta Psychologica*, vol. 4 (1938), págs. 113-170.

son los mismos, pero la condición que relaciona la incógnita con los datos es diferente.

4. Si un "problema por demostrar" es un problema matemático de la forma más usual, sus elementos principales son la *hipótesis* y la *conclusión* del teorema que hay que demostrar o refutar.

"Si los cuatro lados de un cuadrilátero son iguales, las dos diagonales son perpendiculares entre sí." La segunda parte de la frase es la conclusión, la primera, que empieza por "si", es la hipótesis.

[No todos los teoremas de matemáticas pueden escindirse tan fácilmente en hipótesis y conclusión. No es posible, por ejemplo, en el siguiente caso: "Existe una infinidad de números primos."]

5. Para encontrar la solución de un "problema por resolver" hay que conocer, de modo preciso, los elementos principales, incógnita, datos y condición. Nuestra lista contiene numerosas preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos.

¿Cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?; ¿cuál es la condición?

Distinga las diversas partes de la condición.

Encuentre la relación entre los datos y la incógnita.

Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.

No conserve más que una parte de la condición, descarte la otra; ¿en qué medida la incógnita queda entonces determinada?; ¿cómo puede variar? ¿Puede deducir de los datos algún elemento útil?; ¿podría pensar en otros datos que le permitiesen determinar la incógnita?; ¿podría cambiar la incógnita, o los datos, o los dos si es necesario, de tal manera que la nueva incógnita y los nuevos datos estuviesen más relacionados entre sí?

¿Ha empleado todos los datos?; ¿ha utilizado la condición por completo?

6. Si tiene que resolver un "problema por demostrar" debe conocer exactamente sus partes principales, hipótesis y conclusión. Existen a propósito de dichos elementos preguntas y sugerencias útiles correspondientes a las de nuestra lista que están especialmente adaptadas a los "problemas por resolver".

¿Cuál es la hipótesis?; ¿cuál es la conclusión?

Distinga las diversas partes de la hipótesis.

Encuentre la relación entre la hipótesis y la conclusión.

Mire bien la conclusión. Trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o una similar.

No conserve más que una parte de la hipótesis, descarte la otra parte; ¿sigue siendo válida la conclusión? ¿Podría deducir de la hipótesis algún elemento útil?; ¿podría pensar en otra hipótesis de la cual usted pudiera deducir fácilmente la conclusión?; ¿podría cambiar la hipótesis o la conclusión o las dos si es necesario, de modo que la nueva hipótesis y la nueva conclusión estuviesen más relacionadas entre sí?

¿Ha empleado la hipótesis completa?

7. "Los problemas por resolver" tienen mayor importancia en las matemáticas elementales, los "problemas por demostrar" son más importantes en las superiores. En la presente obra se insiste particularmente sobre los "problemas por resolver", pero el autor espera restablecer el equilibrio y tratar en otra ocasión el tema de modo más completo.

Problemas de rutina. Así podemos calificar el problema que consiste en resolver la ecuación

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

a condición de haber explicado previamente la solución general de la ecuación de segundo grado de manera que el alumno sólo tiene que sustituir las letras que figuran en la solución general por los números 1, − 3 y 2. Aun en el caso de que la explicación general no se hubiese dado en términos algebraicos, bastaría resolver una media docena de ecuaciones de segundo grado semejantes, con coeficientes numéricos para que el problema propuesto fuese "de rutina". En general, consideramos dentro de esta categoría todo problema que se puede resolver ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto, ya sea siguiendo paso a paso, sin ninguna originalidad, la traza de algún viejo ejemplo. Al proponer un problema de rutina, el profesor ofrece a los alumnos una respuesta inmediata y decisiva a la pregunta: *¿Conoce algún problema relacionado?* Los alumnos no necesitan entonces más que un poco de atención y paciencia para seguir un precepto experimentado y no tendrán oportunidad de recurrir ni a su juicio ni a sus facultades inventivas.

Los problemas de rutina, incluso empleados en gran número, pueden ser útiles en la enseñanza de matemáticas, pero sería imperdonable proponer a los alumnos exclusivamente problemas de este tipo. Limitar la enseñanza de las matemáticas a la ejecución mecánica de operaciones rutinarias es rebajarlas por debajo del nivel de un "libro de cocina" ya que las recetas culinarias reservan una parte a la imaginación y al juicio del cocinero, mientras que las recetas matemáticas no permiten tal cosa.

Problemas prácticos. Difieren en diversos aspectos de los problemas puramente matemáticos. Sin embargo, los razonamientos, los principales métodos que permiten resolverlos son esencialmente los mismos.

Los problemas prácticos del ingeniero comprenden por lo general una parte matemática. Expondremos aquí las diferencias, las analogías, las relaciones existentes entre estos dos tipos de problemas.

1. La construcción de una presa sobre el curso de un río es un pro-

blema práctico digno de atención. No se necesitan conocimientos especiales para comprenderlo. En los tiempos más antiguos de la civilización, mucho antes de la época moderna, de las teorías científicas, se han construido presas en el Valle del Nilo, por ejemplo, y también en otras partes del mundo donde las cosechas dependían de la irrigación.

Consideremos el problema de la construcción de una gran presa moderna.

¿Cuál es la incógnita? Un problema práctico de esta naturaleza comprende un sinnúmero de incógnitas: emplazamiento exacto de la presa, forma geométrica, dimensiones, materiales a emplear en su construcción, etc.

¿Cuál es la condición? Son muchas y no se puede responder brevemente a esta pregunta. En un proyecto tan amplio hay que satisfacer numerosas necesidades económicas, causando los menores daños posibles a las otras necesidades esenciales. La presa deberá suministrar corriente eléctrica, permitir la irrigación u otros usos del agua al igual que el control de las crecidas. Pero deberá igualmente entorpecer lo menos posible la navegación, la vida de los peces, no estropear un bello paisaje, etc. . . . Y naturalmente, su costo deberá ser el menor posible en tanto que su construcción deberá hacerse lo más rápidamente posible.

¿Cuáles son los datos? La multitud de datos necesarios es tremenda. Se necesitan datos topográficos, relativos al trazo del curso del agua y sus afluentes; datos geológicos —indispensables— para determinar la solidez de los cimientos, las posibles infiltraciones, los materiales de construcción que se pueden hallar en el lugar, etc.; datos meteorológicos, que indiquen las precipitaciones anuales y la altura de las crecidas; datos económicos relativos al valor de los terrenos que quedarán inundados, el costo de los materiales y del trabajo, etc.

Este ejemplo muestra que las incógnitas, los datos y las condiciones son más complejas y están definidas con menor claridad en un problema práctico que en un matemático.

2. Para resolver un problema cualquiera, se necesita un mínimo de conocimientos anteriores. El ingeniero moderno puede utilizar a la vez conocimientos muy especializados, una teoría científica sobre resistencia de materiales, su propia experiencia en problemas de construcción y la que le dan las obras técnicas. Sin disponer de conocimientos tan extensos, podemos tratar de imaginar la manera de razonar de un constructor de presas en el antiguo Egipto.

Sin duda tuvo la ocasión de ver otras presas, menos importantes quizá, montículos de tierra o construcciones de mampostería para retener el agua. Había visto el río en crecida, arrastrando todo tipo de escombros, haciendo presión sobre los montículos de tierra. Quizá ayudó a reparar las brechas

y los daños causados por la erosión debida a una inundación. Pudo haber asistido a la destrucción de una presa cediendo a la presión del agua. Había oído hablar seguramente de presas que han resistido siglos o de catástrofes debidas a rupturas inesperadas. Sin duda ha imaginado la presión que ejerce el agua sobre la superficie de la presa, la resistencia y el esfuerzo de los materiales.

Y sin embargo, tal constructor no tenía ningún concepto científico preciso, cuantitativo, sobre la presión de los fluidos o sobre las fuerzas elásticas en los sólidos, en tanto que tales conceptos constituyen una parte esencial de los conocimientos del ingeniero moderno

Pero incluso éste se sirve de muchos conocimientos que no han alcanzado todavía un nivel científico preciso; lo que se sabe por ejemplo de la erosión debida al agua, de la acumulación de tierra por el arrastre del agua, de la plasticidad y otras propiedades de ciertos materiales, todavía no del todo circunscritas, todo ello presenta un carácter más bien empírico.

Este ejemplo muestra que los conocimientos necesarios y los conceptos empleados son más complejos y están definidos con menor claridad en los problemas prácticos que en los matemáticos.

3. Podemos decir que las incógnitas, los datos, las condiciones, los conceptos, los conocimientos necesarios, en suma, todo en los problemas prácticos es más complejo y menos preciso que en los problemas puramente matemáticos. Esa es la diferencia esencial entre ellos y que implica con toda seguridad otras más. Sin embargo, las razones y los métodos fundamentales que conducen a la solución son propiamente los mismos para los dos tipos de problemas.

Es corriente admitir que los problemas prácticos exigen más experiencia que los otros; es posible. Sin embargo, es probable que la diferencia resida en la naturaleza misma de los conocimientos necesarios y no en nuestra actitud frente al problema. Al resolver un problema, sea cual fuere, hay que hacer siempre un llamado a la experiencia adquirida en el transcurso de trabajos precedentes y formularse con frecuencia las preguntas: *¿Ha visto el mismo problema bajo una forma ligeramente diferente?; ¿conoce algún problema relacionado?*

Al resolver un problema matemático, partimos de conceptos muy claros, relativamente bien ordenados en nuestra mente. Al resolver un problema práctico, estaremos con frecuencia obligados a empezar por ideas más bien vagas; esclarecer los conceptos puede ser entonces una parte importante del problema. La ciencia médica está en mejores condiciones ahora para diagnosticar enfermedades contagiosas que antes de Pasteur, cuando la noción misma de contaminación era bastante vaga. *¿Ha tenido en cuenta todas las nociones esenciales que comporta el problema?* Esta es una pregunta intere-

sante para problemas de todo tipo, pero su empleo varía mucho, según la naturaleza de las nociones que entran en juego.

En un problema matemático bien planteado, todos los datos y todas las cláusulas de la condición son esenciales y se deben tener en cuenta. En los problemas prácticos tenemos una multitud de datos y condiciones; tendremos en cuenta el mayor número posible de ellas, pero estaremos obligados a descuidar una parte. Volvamos al caso del constructor de una gran presa. Tomará en consideración el interés público y los intereses económicos más importantes, pero tendrá que desentender las reivindicaciones individuales y los daños secundarios. Los datos de su problema son propiamente inagotables. Por ejemplo, puede desear conocer algunos detalles más sobre la naturaleza del terreno sobre el cual descansarán los cimientos; pero como no se puede emplear un tiempo indefinido en la obtención de datos geológicos, acabará conformándose con los que tiene, quedando así, muy a pesar suyo, un cierto margen de incertidumbre.

¿Ha empleado todos los datos?; ¿ha empleado la condición completa? No podemos eludir estas preguntas cuando se trata de problemas matemáticos. En los problemas prácticos conviene, sin embargo, modificarlas como sigue: ¿Ha empleado todos los datos *que pueden contribuir de modo apreciable* al descubrimiento de la solución?; ¿ha empleado todas las condiciones *que pueden influir de modo apreciable* en la solución? Después de clasificar la información apropiada de la que se dispone, de haber buscado otras si es necesario, se llega siempre a un momento en el que se deberán abandonar las investigaciones, ponerles punto final, no obstante tener la seguridad de haber descuidado ciertos puntos. "Quien tiene miedo, no cruza el mar." Existe, en efecto, con frecuencia un exceso considerable de datos sin influencia apreciable sobre la forma final de la solución.

4. Los constructores de presas del antiguo Egipto se conformaban con interpretar con sentido común sus experiencias, ya que no podían basarse sobre otra cosa. Por el contrario, el ingeniero moderno no puede sólo recurrir a su buen sentido común, en particular si su proyecto es una empresa nueva y audaz. Debe calcular la resistencia de la presa proyectada, prever cuantitativamente las contracciones en la mampostería, lo que le lleva a aplicar la teoría de la elasticidad (muy aplicable a las construcciones de concreto). Para ello necesita un conocimiento muy amplio de matemáticas; así pues, el problema práctico del ingeniero le lleva a un problema matemático.

Dicho problema es demasiado técnico como para ser tratado aquí; nos conformaremos, pues, con una observación general. Para plantear y resolver problemas matemáticos derivados de problemas prácticos, debemos en general, limitarnos a una *aproximación* dada la imposibilidad de considerar

ciertos datos y condiciones menores del problema práctico. Por ello es tolerable una ligera imprecisión en los cálculos, sobre todo cuando se gana en sencillez lo que se pierde en precisión.

5. Hay mucho que decir sobre las aproximaciones, y la cuestión sería interesante de desarrollar. Pero desconociendo los conocimientos matemáticos de los lectores, nos limitaremos a un solo ejemplo instructivo que no requiere más que intuición.

El trazo de mapas geográficos representa un problema práctico. Para levantar un plano, se admite generalmente que la tierra es una esfera, lo que no es sino una hipótesis aproximada que no corresponde a la realidad exactamente. La superficie de la tierra no puede definirse matemáticamente y sabemos que la tierra está achatada en los polos. Sin embargo, considerándola como una esfera, podemos hacer el mapa mucho más fácilmente; ganamos, pues, mucho en sencillez sin perder gran cosa en precisión. Para demostrarlo, imaginemos un gran balón que tenga exactamente la forma de la tierra, con un diámetro de 3 metros en el ecuador. La distancia entre los polos de dicho balón, menor que dicho diámetro, dado que la tierra es achatada, no varía más que en un centímetro. Se ve así que la esfera resulta ser en la práctica una excelente aproximación.

¿Puede comprobar el resultado?; *¿puede verificar el razonamiento?* Una buena respuesta a estas preguntas reafirma nuestra confianza en la exactitud de la solución y contribuye a consolidar nuestros conocimientos ya obtenidos.

1. Se pueden comprobar los resultados numéricos de problemas matemáticos comparándolos con números fáciles de observar y que el sentido común acepte como apropiados. Como los problemas planteados por las necesidades prácticas o la natural curiosidad están en general basados en hechos, sería de esperarse que nadie omitiese la comparación con hechos observables. Sin embargo, todos los maestros saben que ciertos alumnos llegan en este respecto a resultados increíbles. No les extraña, por ejemplo, determinar 16130 m para el largo de un barco y 8 años 2 meses para la edad del capitán que —dicho sea de paso— se sabe que es abuelo. Este desprecio de la evidencia no implica necesariamente estupidez, es más bien una indiferencia respecto a problemas artificiales.

2. Los problemas "literales" permiten verificaciones más interesantes y en mayor número que los "problemas numéricos" (sección 14). Tomemos otro ejemplo; consideremos una pirámide trunca de base cuadrada. Si el lado de la base inferior es a, el lado de la base superior b, y la altura h, el volumen está dado por

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3}\, h.$$

Podemos verificar este resultado por PARTICULARIZACIÓN. En efecto, si $b = a$ la pirámide truncada se convierte en un prisma y la fórmula da a^2h; y si $b = 0$, la pirámide truncada se convierte en una pirámide dando la fórmula $\frac{a^2h}{3}$. Podemos explicar el EXAMEN DE DIMENSIONES ya que el volumen se expresa entonces por el cubo de una longitud. Podemos asimismo comprobar la exactitud de la fórmula *por variación de los datos,* dado que, si una de las cantidades positivas, a, b o h aumenta, el valor de la fórmula aumenta también.

Tales verificaciones pueden aplicarse no solamente al resultado final, sino también a los resultados intermedios. Son lo suficientemente útiles como para justificar el trabajo suplementario que implican (véase VARIACIÓN DEL PROBLEMA, 4). A fin de poder utilizar tales verificaciones, puede ser interesante generalizar un "problema numérico" y transformarlo en un "problema literal" (ver GENERALIZACIÓN, 3; página 98).

3. *¿Puede verificar el razonamiento?* Verificando el razonamiento paso por paso, debemos evitar la mera repetición. Primero, porque puede resultar fastidiosa, sin interés y cansar la atención. Segundo, porque bajo las mismas circunstancias, donde nos hemos equivocado una vez podemos equivocarnos de nuevo. Si estimamos necesario rehacer por entero el razonamiento paso por paso, cambiemos al menos el orden de los pasos, el orden en que han sido agrupados, introduzcamos ciertas modificaciones.

4. Se requiere menos esfuerzo y es más interesante escoger los puntos flojos de nuestro razonamiento y examinarlos en un principio. Una pregunta de gran utilidad cuando escogemos tales puntos del razonamiento para examinarlos es: HA EMPLEADO TODOS LOS DATOS?; página 98.

5. Es evidente que nuestros conocimientos no matemáticos no pueden únicamente basarse en pruebas formales. La parte más sólida de nuestros conocimientos generales se verifica y se reafirma sin cesar por medio de experiencias cotidianas. En las ciencias naturales se practican en forma más sistemática verificaciones por medio de la observación. Estas toman la forma de experimentos y mediciones minuciosas y se combinan, en las ciencias físicas, con razonamientos matemáticos. ¿Pueden basarse nuestros conocimientos matemáticos solamente sobre pruebas formales?

He ahí una pregunta filosófica que no podemos discutir aquí. Es seguro que nuestros conocimientos matemáticos, tanto los míos como los suyos o los de sus alumnos, no se basan exclusivamente sobre pruebas formales. Todo conocimiento sólido se apoya sobre una base experimental reforzada por cada problema cuyo resultado ha sido cuidadosamente verificado.

¿Puede encontrar el resultado en forma diferente? Cuando la solución, finalmente obtenida, es larga y complicada, podemos suponer que existe otra, más clara y menos tortuosa: *¿Puede encontrar el resultado en forma diferente?; ¿puede verlo de una ojeada?* Aunque la solución que hemos encontrado sea satisfactoria, siempre es interesante encontrar otra. Es deseable convencerse de la validez de un resultado teórico por medio de dos razonamientos diferentes, al igual que es deseable percibir un objeto material por medio de dos sentidos diferentes. Habiendo encontrado una demostración, deseamos encontrar otra del mismo modo que queremos tocar un objeto después de que lo hemos visto.

Esto equivale a decir que dos pruebas valen más que una.

1. *Ejemplo.* Determinar el área S de la superficie lateral de un tronco de cono, conociendo el radio R de la base inferior, r el de la base superior y la altura h.

Existen diversos métodos para resolver este problema. Si, por ejemplo, conocemos la fórmula para calcular la superficie lateral del cono, ya que un tronco de cono se obtiene eliminando de un cono otro más pequeño, su superficie lateral será la diferencia entre las superficies laterales de los dos conos; queda por expresarse en términos de R, r y h. Desarrollando esta idea, se obtiene finalmente la fórmula

$$S = \pi (R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

Una vez obtenido este resultado, después de cálculos más o menos largos, podemos buscar otro razonamiento, más claro y menos tortuoso. *¿Puede encontrar el resultado en forma diferente?; ¿puede verlo de una ojeada?*

Deseando ver intuitivamente el conjunto del resultado, podemos al principio esforzarnos en comprender el significado geométrico de sus componentes. Podemos entonces observar que

$$\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

es la longitud del *lado oblicuo.* (Se llama así a uno de los lados no paralelos del trapecio isósceles que, girando alrededor de la recta determinada por los puntos medios de sus lados paralelos, engendra el tronco de cono: véase figura 21).

También podemos descubrir que

$$\pi (R + r) = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}$$

es la media aritmética de los perímetros de las dos bases del tronco de cono. La consideración de la misma parte de la fórmula, puede inducirnos a escribirla bajo la forma

$$\pi (R + r) = 2\pi \frac{R + r}{2}$$

que es el *perímetro de la sección media* del tronco de cono. (Llamamos aquí sección media a la intersección del cono por un plano paralelo a las dos bases y que corta a la altura en dos partes iguales.)

Estas nuevas interpretaciones de las diversas partes de la fórmula nos permiten ver el conjunto desde un ángulo diferente. Podemos leerlo como sigue:

Area = Perímetro de la sección media × altura oblicua.

Podemos entonces recordar la regla para el trapecio:

Area = mediana × altura.

(La mediana es paralela a los dos lados paralelos del trapecio y corta a la altura en dos partes iguales.) La comparación intuitiva de las dos

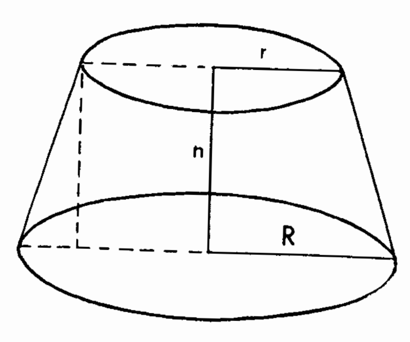


FIG. 21

fórmulas —la relativa al tronco de cono y la relativa al trapecio— nos hace apreciar "de un vistazo" el conjunto del resultado relativo al tronco de cono. Nos damos cuenta entonces que estamos a punto de obtener una demostración rápida y directa de un resultado que había requerido antes largos cálculos.

2. El ejemplo precedente es típico. No satisfechos del todo del modo en que habíamos obtenido el resultado, hemos tratado de mejorarlo, de transformarlo. Con ese fin lo hemos estudiado de nuevo, esperando comprenderlo mejor, ver un nuevo aspecto. Podemos obtener un primer adelanto observando una nueva interpretación de uno de sus detalles. Después podemos, por casualidad o por suerte, descubrir una nueva forma de concebir otro detalle.

El examinar los detalles uno tras otro, ensayando diversas formas de considerarlos, nos conduce finalmente, a ver el conjunto bajo un aspecto completamente diferente del anterior y deducir una demostración nueva.

Todo lo que precede, hay que confesarlo, incumbe más bien a un matemático experimentado tratando un problema delicado, que a un principiante que trata de resolver un problema elemental. El primero, es cierto, en razón de sus extensos conocimientos, está más expuesto que el segundo a hacer un llamado a muchos recuerdos y a concebir un razonamiento innecesariamente complicado. Pero ese riesgo se compensa por el hecho de que el matemático experimentado está en mejores condiciones que un principiante para apreciar el modo en que conviene interpretar de nuevo una parte del resultado y proceder finalmente, acumulando muchas pequeñas ventajas, hasta llegar a una nueva interpretación de todo el resultado.

Puede suceder, sin embargo, incluso en las clases más elementales, que los alumnos presenten una solución innecesariamente complicada. El profesor debe hacerles ver entonces, aunque sea una o dos veces, no solamente el modo de resolver el problema en forma más breve, sino también cómo hacer para encontrar, en el resultado mismo, la indicación de una solución más rápida. Véase también REDUCCIÓN AL ABSURDO Y DEMOSTRACIÓN INDIRECTA, página 179.

¿Puede utilizarse el resultado? Encontrar la solución de un problema por nuestros propios medios es un descubrimiento. Si el problema no es difícil, el descubrimiento es menos importante sin dejar por ello de ser un descubrimiento. Después de hacer algún descubrimiento, por modesto que sea, debemos preguntarnos siempre si no esconde algo; no deberíamos desaprovechar las posibilidades que nos brinda; debemos tratar de utilizar una vez más el método que acaba de tener éxito. Hay que aprovechar siempre los éxitos. *¿Puede utilizarse el resultado o el método en algún otro problema?*

1. Nos es fácil imaginar nuevos problemas por poca que sea la experiencia que tengamos de los principales medios para transformarlos, tales como la GENERALIZACIÓN, PARTICULARIZACIÓN, ANALOGÍA, DESCOMPOSICIÓN Y RECOMPOSICIÓN. Partiendo del problema que se nos propone, encontraremos otros por alguno de los medios mencionados; después partiendo de estos nuevos problemas, encontraremos otros, y así sucesivamente. El proceso es ilimitado en teoría, pero en la práctica no llegaremos muy lejos ya que los problemas que se obtengan corren el riesgo de ser insolubles. Por otra parte, podemos imaginar nuevos problemas que podemos fácilmente resolver utilizando la solución de un problema resuelto previamente; pero es probable que tales problemas carezcan de interés.

Encontrar un nuevo problema que sea a la vez interesante y accesible no es fácil; se necesita experiencia, buen gusto y suerte. Sin embargo, no debemos dejar de buscarlos cada vez que hayamos logrado resolver uno. Hay ciertos puntos en común entre los problemas interesantes y ciertas familias de setas: vienen por grupos. Cuando usted encuentre uno, mire a su alrededor; hay muchas probabilidades de que haya otros en la vecindad.

2. Para ilustrar ciertos puntos expuestos anteriormente, tomaremos de nuevo el ejemplo del que nos hemos valido ya en las secciones **8**, **10**, **12**, **14**, **15**. Partamos, pues, del problema siguiente:

Dadas las tres dimensiones (largo, ancho y altura) de un paralelepípedo rectangular, determinar la diagonal.

Si conocemos la solución de este problema, podemos fácilmente resolver uno de los siguientes (los dos primeros ya han sido expuestos casi por completo en la sección 14):

Dadas las tres dimensiones de un paralelepípedo rectangular, determinar el radio de la esfera circunscrita.

La base de una pirámide es un rectángulo cuyo centro es el pie de la altura de la pirámide. Dada dicha altura y los lados de la base, determinar la longitud de la arista lateral.

Dadas las coordenadas rectangulares (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) de dos puntos en el espacio, encontrar la distancia entre esos dos puntos.

Es fácil resolver estos problemas, pues apenas difieren del problema primitivo cuya solución conocemos. En cada uno de los casos hemos añadido, a los datos iniciales, una noción nueva: esfera circunscrita, pirámide, coordenadas rectangulares. Dichas nociones tan fáciles de eliminar como de añadir, bastará eliminarlas para encontrarse ante el problema primitivo.

Los problemas precedentes presentan un cierto interés por el hecho de que las nociones añadidas al problema original son interesantes ellas mismas. El último, relativo a la distancia entre dos puntos determinados por sus coordenadas, es interesante por la importancia de la noción de coordenadas rectangulares.

3. He aquí otro problema fácil de resolver para quien conozca la solución del problema original: Dados el largo, el ancho y la diagonal de un paralelepípedo rectangular, determinar la altura.

De hecho, la solución del problema original consiste en establecer una relación entre las cuatro cantidades, las tres dimensiones del paralelepípedo y su diagonal. Si tres de esas cantidades son dadas, podemos calcular la cuarta a partir de la relación existente entre ellas. Podemos, pues, resolver el nuevo problema.

Este nuevo ejemplo nos indica el medio de encontrar problemas fáciles de resolver a partir de un problema resuelto: consideremos la incógnita del problema original como uno de los datos y uno de los datos como incógnita. La relación entre la incógnita y los datos es la misma en los dos casos. Habiendo encontrado esta relación en el primero, podemos utilizarla igualmente en el segundo.

Este modo de proceder, que consiste en cambiar los papeles que juegan los datos y la incógnita es muy diferente al expuesto en el párrafo 2.

4. Pasemos ahora a otro modo de encontrar nuevos problemas.

He aquí una *generalización* natural del problema primitivo: Determinar la diagonal de un paralelepípedo, dadas las tres aristas a partir de un extremo de la diagonal y los tres ángulos comprendidos entre las tres aristas.

Por *particularización* obtenemos el problema siguiente: Determinar la diagonal de un cubo cuya arista es dada.

Recurriendo a la *analogía*, descubrimos una variedad inagotable de problemas. He aquí algunos que se derivan de los ya examinados en el párrafo 2. Determinar la diagonal de un octaedro regular cuya arista es dada. Encontrar el radio de la esfera circunscrita a un tetraedro regular de arista dada. Dadas las coordenadas geográficas de dos puntos situados en la superficie de la tierra (considerada como esfera), encontrar su distancia esférica.

Todos estos problemas son interesantes, pero sólo el que se obtiene por particularización puede resolverse inmediatamente sobre la base de la solución del problema original.

5. Podemos también imaginar nuevos problemas considerando como variables ciertos elementos del problema propuesto.

Un caso particular de un problema mencionado en el párrafo 2 consiste en encontrar el radio de una esfera circunscrita a un cubo de arista dada. Consideremos el cubo y el centro común del cubo y de la esfera como datos fijos, pero hagamos variar el radio de la esfera. Cuando el radio es pequeño, la esfera está inscrita en el cubo. A medida que el radio crece, la esfera se expande (como un balón de goma que se infla). En un momento dado, la esfera toca las caras del cubo; un poco después, sus aristas; más tarde, los vértices. ¿Cuál es el valor del radio en cada uno de los momentos críticos?

6. La experiencia de un alumno en matemáticas será incompleta mientras no tenga ocasión de resolver problemas que *él mismo haya inventado*. Enseñando a los alumnos el modo de derivar un nuevo problema de un problema ya resuelto, el profesor logrará suscitar la curiosidad de sus alumnos. Puede también dejarles una parte del descubrimiento, por ejemplo, exponiendo el caso de la esfera que se dilata como acabamos de hacer (párrafo 5) y preguntándoles: "¿Qué tratarán ustedes de calcular?; ¿qué valores del radio son particularmente interesantes?"

Razonamiento heurístico. El razonamiento heurístico es un razonamiento que se considera no como definitivo y riguroso, sino simplemente como provisional y plausible y cuyo objeto es descubrir la solución del problema propuesto. El razonamiento heurístico es de empleo frecuente. No se llega a una certeza plena sino después de haber obtenido la solución completa, pero hasta ahí nos contentaremos con frecuencia con una hipótesis más o menos plausible. Se puede necesitar lo provisorio antes de lograr

lo definitivo. En la construcción de una demostración rigurosa el razonamiento heurístico juega el mismo papel que el andamiaje en la construcción de un edificio.

Véase INDICIOS DE PROGRESO. El razonamiento heurístico se basa con frecuencia sobre la inducción o la analogía; véase INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, y, ANALOGÍA, 8, 9 y 10; páginas 62-63.*

El razonamiento heurístico es bueno por sí mismo; lo que es malo es asociarlo a la demostración rigurosa; lo que es peor, es presentarlo como demostración rigurosa.

La enseñanza de ciertos temas, en particular la del cálculo para ingenieros y físicos, podría mejorarse en su esencia misma si la naturaleza del razonamiento heurístico fuese comprendida mejor, si se reconociesen francamente sus ventajas así como sus limitaciones y si los textos escolares lo presentasen abiertamente. Un razonamiento heurístico presentado con gusto y con franqueza puede ser útil; puede preparar el camino al razonamiento riguroso del cual encierra usualmente ciertos gérmenes. Pero corre el riesgo de ser nocivo si se presenta de modo ambiguo, oscilando visiblemente entre la vergüenza y la pretensión. Véase ¿POR QUÉ LAS DEMOSTRACIONES?

Razonamiento regresivo. Para comprender el comportamiento del hombre, hay que compararlo con el del animal. Los animales también tienen "problemas por resolver". La psicología experimental ha hecho, en las últimas décadas, un progreso esencial examinando la manera en que algunos de ellos los "resuelven". No podemos tratar aquí esas investigaciones, sólo nos limitaremos a esbozar la descripción de una sola experiencia sencilla e instructiva a título de comentario del método de análisis o método del "razonamiento regresivo". Ya hemos hablado de este método en otra parte de la presente obra, bajo el nombre de PAPPUS, filósofo al que debemos una importante descripción del mismo.

1. Tratemos de encontrar respuesta a la siguiente adivinanza: *¿Cómo haría para traer de un río seis litros de agua, si no tiene a su disposición, para medir el agua, más que dos recipientes, uno de cuatro litros y otro de nueve?*

Representémonos claramente los instrumentos de trabajo, es decir, los dos recipientes. (*¿Cuáles son los datos?*) Imaginemos que son cilíndricos, de bases iguales y de altura 9 y 4; véase figura 22.

Si hubiese, en la superficie lateral de cada uno de ellos, una graduación de líneas horizontales igualmente espaciadas, lo que nos daría en cualquier momento la altura del nivel del agua, el problema sería fácil. Pero no existiendo dicha graduación, estamos lejos de la solución.

* Véase también el artículo del autor en *American Mathematical Monthly*, vol. 48, págs. 450-465.

No sabemos todavía cómo medir exactamente seis litros; ¿podríamos medir otra cantidad? (*Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero otro relacionado. ¿Podría deducir algo útil de los datos?*) Hagamos ensayos, tanteemos un poco. Podemos llenar por completo el mayor recipiente; si con su contenido llenamos entonces el pequeño, nos quedan —en el grande— cinco litros. ¿Podemos de igual modo obtener seis? Vaciemos de nuevo los dos recipientes . Podríamos también. . .

Obramos así como la mayor parte de la gente a la que se plantea este problema. Partiendo de los dos recipientes vacíos hacemos un ensayo, des-

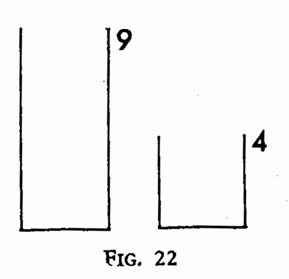


FIG. 22

pués otro, vaciándolos y llenándolos repetidamente, y tras cada fracaso, volvemos a empezar buscando otra cosa. En resumen, *avanzamos* partiendo de la situación dada al principio, hacia la situación final deseada, es decir, yendo de los datos a la incógnita. Puede suceder que tras muchos intentos logremos el propósito casualmente.

2. No les sucede esto a investigadores bien dotados o a las personas que han tenido la suerte de no aprender solamente, en sus clases de matemáticas, operaciones puramente rutinarias; éstos no perderán el tiempo en ese tipo de tentativas, darán media vuelta y enfocarán el problema a la inversa.

¿Qué se nos pide? (*¿Cuál es la incógnita?*) Representémonos lo más claramente posible la situación final que queremos alcanzar. Imaginemos que tenemos ante nosotros el recipiente grande que contase exactamente

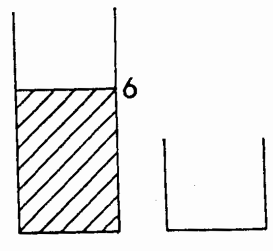


FIG. 23

seis litros y el pequeño, vacío, como en la figura 23. (*Partamos de lo que se pide y admitamos,* con PAPPUS, *que lo que se busca ha sido ya encontrado.*)

¿A partir de qué situación anterior a ésta podríamos obtener la situación final deseada, como se muestra en la figura 23? (*Busquemos a partir de qué antecedentes podría encontrarse el resultado final,* dice PAPPUS.)

Podríamos llenar el recipiente grande, es decir, medir nueve litros. Haría falta entonces poder quitar exactamente tres litros. Para ello. . . , haría falta tener ya un litro en el pequeño. ¡Esa es la idea! (Véase fig. 24.)

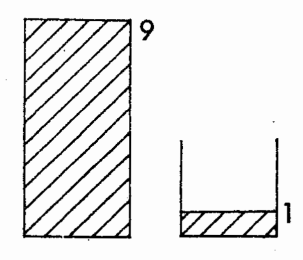


FIG. 24

(El paso que hemos dado no es de los más fáciles. Pocas personas son las que lo intentan antes de mucho dudar. De hecho, tan pronto se reconoce el significado de este razonamiento, se prevé la línea general de la solución que sigue.)

Pero ¿cómo lograr la situación que hemos encontrado e ilustrado en la figura 24? (*Busquemos de nuevo cuál podría ser el antecedente de este antecedente.*) Dado que la cantidad de agua que contiene el río, para nuestros efectos es ilimitada, la situación de la figura 24 se reduce a la de la figura 25.

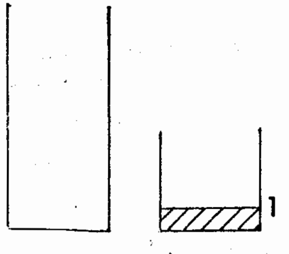


FIG. 25

o a la de la figura 26.

Es fácil reconocer que, si se obtiene una cualquiera de las situaciones de las figuras 24, 25, 26, se obtendrán igualmente las otras dos; pero no es tan fácil el llegar a la situación de la figura 26, a menos de *haberla ya encontrado,* de haberla visto casualmente en el transcurso de las tentativas

precedentes. Repitiendo sin cesar las experiencias con los dos recipientes, podemos haber logrado algo análogo y acordarnos, en el momento preciso, que la situación de la figura 26 puede presentarse como se sugiere en la figura 27: llenando el recipiente grande y después vaciamos dos veces 4 litros en el pequeño y de ahí al río. *Encontramos finalmente algo ya conocido* (son las palabras de Pappus); así, por el método del análisis,

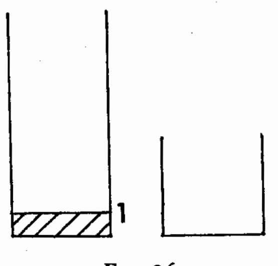


FIG. 26

por medio del *razonamiento regresivo* hemos descubierto la sucesión de operaciones apropiadas.

Es cierto que esto se ha hecho a contrapelo, pero no tenemos más que *invertir el proceso partiendo del último punto alcanzado en nuestro análisis* (como dice Pappus). Hacemos primero las operaciones sugeridas por la figura 27 obteniendo la figura 26; después pasamos a la figura 25, de ahí

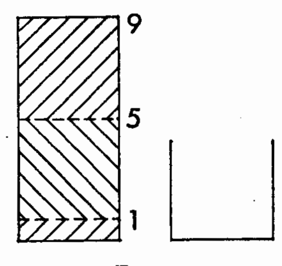


FIG. 27

a la figura 24, y finalmente, a la figura 23. *Volviendo sobre nuestros pasos, llegamos finalmente a lo que se nos pedía.*

3. Se atribuye a Platón, según la tradición griega, el descubrimiento del método analítico. Quizá no es del todo exacto, pero incluso si Platón no es el inventor, algún sabio griego que ha permanecido en el anonimato consideró necesario atribuir su invención a un filósofo genial.

Hay con toda seguridad algo profundo en el método. Hay que vencer

cierta resistencia psicológica para poder dar media vuelta y, partiendo de la meta, trabajar hacia atrás en lugar de seguir el camino directo hacia el fin deseado. A fin de descubrir la sucesión de operaciones apropiadas, nuestro intelecto debe seguir un orden exactamente inverso al orden real. Se manifiesta respecto a este orden inverso una especie de repugnancia psicológica que puede impedir a un alumno capaz comprender el método si no se le presenta cuidadosamente.

No obstante, no es necesaria la genialidad para resolver un problema concreto trabajando hacia atrás. Basta concentrarse sobre el propósito deseado, representarse la situación final que se quiere obtener. ¿A partir de qué situación precedente podríamos lograrla? Es natural el plantearse esa pregunta, y haciéndolo, volvemos hacia atrás. Problemas del todo primitivos pueden llevarnos a esta operación (véase PAPPUS 4; página 136).

Es este un procedimiento que proviene del sentido común, al alcance de todo el mundo y que sin duda alguna fue empleado por matemáticos y no matemáticos antes de Platón. Lo que un griego pudo considerar como empresa digna del genio de Platón, es el haber formulado el método en términos generales, el haberlo presentado como una operación típicamente útil para resolver problemas tanto matemáticos como no matemáticos.

4. Examinemos ahora la experiencia psicológica, si no se considera demasiado abrupta la transición que nos hace pasar repentinamente de Platón a perros, gallinas y chimpancés. Una barrera limita tres de los lados de un rectángulo, dejando abierto el cuarto como se muestra en la figura 28.

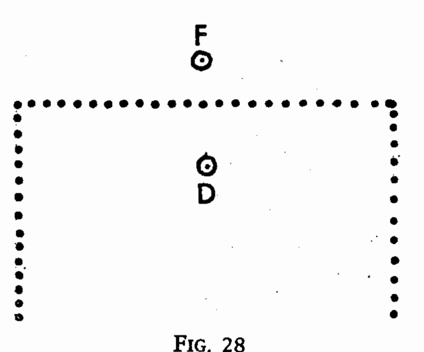


FIG. 28

Coloquemos un perro a un lado de la barrera, en *D*, y su comida al otro lado, en *F*. El problema es relativamente fácil para el perro. Quizá trate al principio de saltar directamente sobre la comida, pero, rápidamente, dará media vuelta, se precipitará hacia el extremo de la barrera y describiendo una curva sin vacilar, alcanzará la comida. En ciertos casos, sin embargo, especialmente si los puntos *D* y *F* están muy cerca uno del otro, la solución

no es tan fácil; el perro puede perder cierto tiempo en ladrar, rascar, saltar sobre la barrera antes de "concebir la idea brillante" (como diríamos), que consiste en dar la vuelta al obstáculo.

Es interesante estudiar el comportamiento de otros animales ante esta misma situación. El problema es muy fácil para un chimpancé (como lo sería para un niño de cuatro años, para quien por lo demás, un juguete puede ser un estímulo más eficaz que algún alimento). Pero, cosa curiosa, resulta ser una dificultad sorprendente para una gallina, la cual se excita, corre de un lado a otro, permaneciendo en el interior de la barrera, pasando un tiempo considerable antes de que alcance la comida, si es que la alcanza. De todos modos no la logrará sino después de mucho correr y siempre por casualidad.

5. No sabríamos edificar una teoría general a partir de una sola experiencia, sobre todo tan simple y apenas esbozada. Pero no hay ningún inconveniente en deducir analogías evidentes, a condición de disponerse a revisarlas y reconsiderar su valor.

Dar la vuelta a un obstáculo es lo que hacemos cuando tenemos que resolver un problema cualquiera; el experimento expuesto tiene, pues, una especie de valor simbólico. La gallina en su comportamiento es comparable a las personas que resuelven sus problemas por tanteos, después de muchos ensayos sucesivos y que lo logran finalmente gracias a una casualidad, sin comprender las razones del éxito. El perro que rascaba, saltaba, ladraba antes de dar media vuelta, resuelve su problema casi al igual que nosotros lo hemos hecho en el caso de los dos recipientes. Imaginar una graduación que indicase el nivel del agua en los recipientes, era como rascar la tierra en vano. También nosotros, habíamos tratado primero de ir derecho a la cuestión y hasta después nos ha venido la idea de dar media vuelta. El perro que, tras de haber inspeccionado rápidamente la situación, ha dado media vuelta y se ha precipitado fuera del recinto da también, con razón o sin ella, la impresión de una intuición superior.

Pero tampoco podemos culpar a la gallina por su estupidez. En efecto, no es ni natural ni fácil el dar media vuelta, alejarse de la meta, avanzar sin tener constantemente el ojo puesto en el resultado, el no seguir un camino directo que nos lleve a los fines deseados. Hay, en suma, una analogía evidente entre las dificultades de la gallina y las nuestras.

Reducción al absurdo y demostración indirecta. Son dos métodos diferentes, pero relacionados.

La reducción al absurdo demuestra la falsedad de una afirmación deduciendo de ella una manifiesta absurdidad. La "reductio ad absurdum" es un método matemático, pero tiene cierto parecido con la ironía, método favorito de la sátira. El irónico adopta, en toda apariencia, un cierto punto

de vista y lo lleva a sus conclusiones extremas, hasta el punto en que se llega a una absurdidad manifiesta.

La demostración indirecta establece la verdad de una afirmación demostrando la falsedad de la afirmación contraria. La demostración indirecta se parece un poco al proceder del político que apoya a un candidato poniendo en tela de juicio la reputación de su oponente.

La reducción al absurdo y la demostración indirecta son herramientas eficaces en el trabajo de descubrimiento, que se presentan de modo natural a la mente del investigador. No obstante, ciertos filósofos y muchos principiantes demuestran hacia ellas una cierta aversión, lo cual es comprensible: los satíricos y los políticos hábiles no pueden, en efecto, agradar a todo el mundo. Ilustremos primero por medio de ejemplos la eficacia de estos dos métodos, después discutiremos las objeciones que se les han puesto.

1. *Reducción al absurdo.* Escribir números empleando una sola vez cada uno de los diez dígitos y de tal forma que la suma de dichos números sea igual a 100.

Puede resultar interesante tratar de resolver este enigma cuyo enunciado requiere cierta elucidación.

¿Cuál es la incógnita? Un conjunto de números; y por números entendemos, claro está, números enteros.

¿Cuál es el dato? El número 100.

¿Cuál es la condición? Comprende dos partes. Primero, para escribir el conjunto de números requeridos, hay que emplear cada uno de los diez dígitos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 solamente una vez. Segundo, la suma de los números del conjunto debe ser igual a 100.

Conserve una sola parte de la condición, descarte la otra. La primera parte sola es fácil de satisfacer. Tomemos la serie 19, 28, 37, 46, 50. Cada dígito aparece una sola vez. Pero claro está, la segunda parte de la condición no se satisface; la suma de dichos números es 180 y no 100. Podemos, sin embargo, hacerlo mejor. "Trate, trate de nuevo." Si, por ejemplo

$$19 + 28 + 30 + 7 + 6 + 5 + 4 = 99$$

La primera parte de la condición se satisface y la segunda casi se satisface, dado que tenemos 99 en lugar de 100. Podríamos de igual modo satisfacer fácilmente la segunda parte si descartamos la primera:

$$19 + 28 + 31 + 7 + 6 + 5 + 4 = 100$$

Ahora es la primera parte la que no se satisface dado que la cifra 1 aparece dos veces y el 0 ninguna. "Trate, trate de nuevo."

Después de algunos otros intentos infructuosos, podemos sospechar que no es posible obtener el número 100 de la forma en que se pide. Entonces se plantea el problema siguiente: *Demostrar que es imposible satisfacer al mismo tiempo las dos partes de la condición propuesta.*

Incluso los buenos alumnos pueden considerar este problema por encima de sus posibilidades. Basta, sin embargo, tomar una actitud correcta. *Debemos examinar la situación hipotética en la cual las dos partes de la condición están satisfechas.*

Los intentos infructuosos nos han hecho suponer que dicha situación no podía presentarse en la realidad. No obstante, sin dejarnos llevar por esa idea, examinemos la hipótesis según la cual las dos partes de la condición fuesen satisfechas. Imaginemos, pues, una serie de números cuya suma es 100. Deben ser de una o de dos cifras. Por otra parte hay diez cifras y dichas diez cifras deben ser todas diferentes, puesto que cada una de ellas, 0, 1, 2, . . . , 9 no debe aparecer sino una vez. La suma de las diez cifras es

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Así pues, algunas de esas cifras representarán unidades, las otras decenas. Se requiere cierta sagacidad para dar con la idea de que *la suma de las cifras que representan decenas* puede tener cierta importancia. Representemos dicha suma por t. La suma de las cifras restantes que representan las unidades será $45 - t$. Por tanto, la suma de todos los números de la serie debe ser

$$10t + (45 - t) = 100$$

Ecuación de primer grado en t que permite determinar su valor

$$t = \frac{55}{9}$$

Se constata ahora que hay algo erróneo. El valor determinado para t no es número entero y ello es evidentemente contrario a la condición. Partiendo de la hipótesis según la cual se podían satisfacer a la vez las dos partes de la condición, hemos llegado a una absurdidad manifiesta. ¿Cómo podemos explicar esto? Admitiendo que la hipótesis original era errónea y que las dos partes de la condición no podían satisfacerse al mismo tiempo. Así pues, hemos llegado a nuestra meta. Hemos logrado demostrar, que las dos partes de la condición propuesta son incompatibles.

Nuestro razonamiento es una típica "reducción al absurdo".

2. *Observaciones.* Volvamos al razonamiento precedente y tratemos de comprender su curso general.

Queremos demostrar que es imposible cumplir una cierta condición, es decir, que no se puede presentar nunca una situación en la cual todas las partes de la condición se satisfagan simultáneamente. Pero, si todavía nada hemos demostrado, debemos admitir la posibilidad de que dicha situación pudiese presentarse. Sólo examinando de cerca la situación hipotética po-

demos esperar encontrar el punto erróneo que encierra. Y estamos en la obligación de determinar dicho punto para poder demostrar en forma concluyente que la situación es imposible. Vemos así que el procedimiento que nos llevó al éxito en nuestro ejemplo es generalmente razonable. Debemos examinar la situación hipotética en la cual todas las partes de la condición se satisfagan, *pese a que dicha situación parezca poco verosímil.*

El lector más experimentado se plantea ahora otra cuestión. El paso principal de nuestro método consistía en establecer la ecuación para t. Podríamos haber llegado a la misma ecuación sin sospechar que la condición era imposible. Para establecer una ecuación debemos expresar en lenguaje matemático el hecho de que todas las partes de la condición se satisfacen, *no obstante desconocer aún si es realmente posible satisfacer simultáneamente a esas diversas partes.*

Nuestro método es de "criterio abierto". Puede conducirnos ya sea a encontrar la incógnita que satisfaga la condición o a demostrar que la condición es imposible de satisfacer. Por lo demás, poco importa: si se lleva bien, la investigación comenzará en ambos casos por el examen de la situación hipotética, en la cual la condición se cumple y solamente en la etapa final sabremos cuál de las dos posibilidades estaba justificada.

Compárese con FIGURAS, 2 y con PAPPUS; todo análisis que se termina por la refutación del teorema propuesto o por la demostración de que el "problema por resolver" propuesto no tiene solución, constituye una reducción al absurdo.

3. *Demostración indirecta.* Son primos los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, . . . , que no pueden descomponerse en factores y son mayores que 1. (Esta última cláusula excluye al número 1 que tampoco puede descomponerse en factores, pero que por ser de naturaleza diferente no debe considerársele como número primo.) Los números primos son los "elementos últimos" en los cuales pueden descomponerse todos los números enteros (mayores que 1). Por ejemplo,

$$630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

se descompone en un producto de cinco números primos.

¿Es infinita la serie de los números primos o tiene algún límite? Parece natural responder afirmativamente a esta pregunta. Si la serie de los números primos fuese limitada, todos los números enteros podrían descomponerse en un número finito de elementos últimos y el universo parecería "un tanto pobre", por así decirlo. Esto plantea el problema que consiste en demostrar la existencia de una infinidad de números primos.

Dicho problema es muy diferente a los problemas elementales que se plantean en general y parece a simple vista muy difícil. Sin embargo, ya lo hemos dicho, parece poco verosímil que exista un último número primo P por ejemplo. ¿Por qué?

Supongamos la existencia de un último número primo, P. Podríamos entonces escribir la serie completa de los números primos, 2, 3, 5, 7, 11, . . . P. ¿Por qué esta hipótesis es tan poco verosímil? ¿Qué hay de erróneo? ¿Es que podemos determinar el error? Sí, dado que podemos considerar el número

$$Q = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \ldots \times P) + 1$$

Este número Q siendo mayor que P no puede ser por hipótesis un número primo. Q debe ser, pues, divisible entre un número primo. Ahora bien, todos los números primos de que disponemos son por hipótesis los números 2, 3, 5, . . . P, y, dividido entre uno cualquiera de dichos números, Q determina un residuo 1; Q no es, pues, divisible entre ninguno de los números primos mencionados, los cuales constituyen, por hipótesis, la totalidad de los números primos. Se nos presenta pues ahí algo manifiestamente erróneo; Q debe, o bien ser un número primo o bien ser divisible entre un número primo. Partiendo de la hipótesis que existía un último número primo, P, hemos llegado a una absurdidad manifiesta. ¿Cómo explicarla? Nuestra hipótesis primitiva debía ser errónea; no existe un número P que sea el último número primo. Hemos, pues, logrado demostrar la existencia de una infinidad de números primos.

Esta demostración es una típica demostración indirecta. (Es una famosa demostración debida a Euclides; véase la Proposición 20 del Libro IX de los Elementos.)

Hemos demostrado el teorema (a saber, que existe una infinidad de números primos) refutando su contrario del que hemos deducido una absurdidad manifiesta.

Así pues, hemos combinado la demostración indirecta y la reducción al absurdo, combinación ésta también muy característica.

4. *Objeciones.* Los métodos que estudiamos han encontrado una oposición considerable. Han surgido muchas objeciones que, probablemente, no son más que formas diferentes de la misma objeción fundamental. Trataremos aquí en forma "práctica" la objeción que se sitúa a nuestro nivel.

Encontrar una demostración que no sea evidente es un logro intelectual considerable, pero el aprenderla o incluso comprenderla a fondo requiere también cierto esfuerzo mental. Es muy natural que queramos sacar algún provecho de dicho esfuerzo y, claro es, que queramos reservar los recursos de nuestra memoria para lo que es verdadero y correcto y no para lo falso y absurdo.

Pero parece difícil retener alguna cosa verdadera partiendo de una reducción al absurdo. El método consiste en partir de una hipótesis falsa y

deducir consecuencias correctamente derivadas, pero igualmente falsas, hasta llegar a una última consecuencia manifiestamente falsa. Para evitar el recargar nuestra memoria con una serie de errores no nos queda otro recurso que olvidarlo todo y lo más pronto posible, lo cual no es fácil debido a que en el transcurso del desarrollo de la demostración debemos recordar cada punto de manera precisa y correcta.

Enunciemos ahora muy brevemente la objeción que se hace a la demostración indirecta: "Atendiendo a una demostración de este tipo, debemos fijar constantemente nuestra atención sobre una hipótesis falsa que después debemos olvidar, y no sobre el teorema correcto que deberemos retener."

Para apreciar tal objeción en su justo valor, hay que distinguir entre las dos formas de valerse de la reducción al absurdo, que en algunos casos empleamos como una herramienta de la investigación, en otros como un medio de exponer un razonamiento; la misma distinción debe establecerse en lo que concierne a la demostración indirecta.

Hay que reconocer que la reducción al absurdo no es un medio del todo acertado para exponer una solución. Una demostración de ese tipo, sobre todo si es larga, puede tornarse molesta para el lector o el auditorio. Aunque todos los razonamientos sucesivamente examinados sean correctos, todas las situaciones consideradas son imposibles. Incluso la expresión verbal puede tornarse tediosa si, como se debe, insiste en subrayar el hecho de que todo reposa sobre una hipótesis inicial; las palabras "por hipótesis", "según lo supuesto" se repiten sin cesar, a menos que se emplee constantemente otro procedimiento análogo, pero no mejor.

Debemos descartar y olvidar la situación por imposible, pero debemos retenerla y examinarla por ser base del siguiente paso del razonamiento y esta contraposición interna puede, a la larga, resultar insoportable.

Todo esto no debe impedir el valerse de la reducción al absurdo como instrumento de investigación. Puede presentarse asimismo en forma natural y lograr un resultado que todos los otros medios parecen no poder lograr; lo hemos visto en los ejemplos precedentes.

Se requiere cierta experiencia para percibir que no hay oposición esencial entre nuestros dos argumentos. La experiencia enseña que no es muy difícil convertir una demostración indirecta en una demostración directa o presentar una demostración deducida de una larga "reductio ad absurdum" con una forma más agradable, por lo que la reducción al absurdo puede incluso desaparecer por completo (o tras una preparación adecuada, podrá condensarse en unas cuantas frases contundentes).

En suma, si queremos aprovechar nuestra capacidad al máximo, debemos familiarizarnos tanto con la reducción al absurdo como con la demostración indirecta. Sin embargo, una vez logrado el resultado por medio de uno de estos métodos, no debemos dejar de examinar la solución y preguntarnos: *¿Puede obtenerse el resultado de modo diferente?*

Ilustremos lo dicho por medio de ejemplos.

5. *Presentación en forma diferente de una reducción al absurdo.* Volvamos al razonamiento desarrollado en el párrafo 1. La reducción al absurdo partía de una situación que, a fin de cuentas, debía aparecer como imposible. Hay, sin embargo, una parte del razonamiento, independiente de la hipótesis inicial —falsa— que puede darnos una información positiva. Examinando de nuevo el trabajo, podemos constatar la existencia de un elemento importante, verdadero sin duda alguna: si un conjunto de números de una o dos cifras se escribe de forma tal que cada uno de los diez dígitos aparece una sola vez, la suma de dichos números debe tomar la forma siguiente

$$10t + (45 - t) = 9(t + 5).$$

Esta suma es, pues, divisible por 9. El problema propuesto pedía que dicha suma fuese 100. ¿Es posible? No, ya que 100 no es divisible por 9.

La reducción al absurdo que nos había conducido al descubrimiento del razonamiento ha desaparecido bajo esta nueva presentación.

Observemos de paso que basta conocer el método de la prueba de nueves para abarcar de un vistazo el razonamiento completo.

6. *Transformación de una demostración indirecta.* Volvamos al razonamiento presentado en el párrafo 3. Examinando de nuevo cuidadosamente lo que se ha hecho, podemos encontrar en el razonamiento elementos independientes de toda hipótesis falsa; no obstante la mejor idea va a provenir de un nuevo examen del significado del propio problema original.

¿Qué queremos decir al afirmar la existencia de una infinidad de números primos? Evidentemente esto: por larga que sea una serie finita de números primos tales como 2, 3, 5, 7, 11, . . . P, en la que P representa el último número primo hasta entonces determinado, existirá siempre otro número primo. Entonces, ¿cómo demostrar que esta serie de números primos es infinita? Descubriendo el medio de encontrar un número primo diferente de todos los encontrados hasta el momento. De este modo, nuestro "problema por demostrar" se convierte de hecho en un "problema por resolver". *Dados los números primos* 2, 3, 5, . . . P, encontrar un *nuevo número primo* N *diferente de todos los números primos dados.*

Habiendo formulado el problema original bajo esta nueva forma, hemos dado el paso decisivo. Es relativamente fácil ahora, ver cómo conviene emplear las partes esenciales de nuestro primer razonamiento para llegar al nuevo propósito. De hecho, el número

$$Q = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \ldots \times P) + 1$$

es con toda certeza divisible entre un número primo. Tomemos para N —he aquí la idea— un número primo cualquiera divisor de Q (por ejemplo, el menor). (Claro está, si Q es un número primo, entonces $N = Q$.) Es evidente que Q dividido por cualquiera de los números primos 2, 3, 5, . . . P da de residuo 1 y que, por consiguiente, ninguno de esos números puede ser N que es divisor de Q. Es todo lo que necesitamos: N es un número primo, diferente de todos los números primos que se han encontrado hasta el momento, 2, 3, 5, 7, 11, . . . P.

Esta demostración suministra un método preciso que permite prolongar indefinidamente la serie de los números primos. Nada tiene de indirecta, no tiene que considerar situaciones imposibles. Y sin embargo, fundamentalmente, esta demostración es idéntica a nuestra primera demostración indirecta, que nos hemos propuesto y logrado transformar.

Redundante. Véase CONDICIÓN, página 66.

Reglas de enseñanza. La primera de estas reglas es conocer bien lo que se quiere enseñar. La segunda es saber un poco más.

Hay que comenzar por el principio. El autor no considera del todo inútil proponer a los profesores reglas de conducta; de otro modo no habría escrito esta obra acerca del comportamiento respectivo del profesor y los alumnos. No obstante, no olvidemos que un profesor de matemáticas debe saber lo que enseña y que, si desea inculcar a sus alumnos la correcta actitud mental para abordar problemas, debe él mismo haber adquirido dicha actitud.

Reglas de estilo. La primera regla de estilo consiste en tener algo qué decir. La segunda es saberse controlar en caso de tener dos cosas por decir; exponer primero la una y después la otra, no ambas a la vez.

Reglas del descubrimiento. La primera de estas reglas es ser inteligente y tener suerte. La segunda es sentarse bien tieso y esperar la ocurrencia de una idea brillante.

Creemos oportuno recordarle, en forma un tanto abrupta, que ciertas aspiraciones están destinadas al fracaso. Reglas infalibles que permitiesen resolver todo problema de matemáticas serían con toda seguridad preferibles a la piedra filosofal tan buscada en vano por los alquimistas. Tales reglas procederían de la magia, y no hay tal magia. Encontrar reglas infalibles aplicables a todo tipo de problemas no es más que un viejo sueño filosófico sin ninguna posibilidad de realizarse.

Una heurística razonable no busca reglas infalibles; pero puede esforzarse en estudiar procedimientos —procesos mentales, formas, etapas del razonamiento— particularmente útiles en la solución de problemas. Esos métodos están a la disposición de toda persona razonable suficientemente interesada en el problema que se le propone. Ciertas preguntas y sugerencias estereotipadas aluden a ellos: son las que las personas inteligentes se hacen a sí mismas, las que los profesores dignos de tal nombre plantean a sus alumnos. Es sin duda menos interesante disponer en una lista estas preguntas y sugerencias —enunciadas en forma general y presentadas en un orden apropiado— que tener la piedra filosofal. Pero al menos es posible procurarse tal lista. La que estudiamos aquí presenta una serie de preguntas de ese tipo.

Sabiduría de los proverbios. Resolver problemas es una actividad humana fundamental. De hecho, nuestro pensamiento consciente trabaja la mayor parte del tiempo sobre problemas. Cuando no dejamos la mente a su libre albedrío, cuando no la dejamos soñar, nuestro pensamiento tiende hacia un fin; buscamos medios, buscamos resolver un problema.

Algunos logran alcanzar mejor que otros la meta resolviendo sus problemas. Se notan estas diferencias, se discuten, se comentan. Ciertos proverbios parecen haber conservado la esencia misma de esas observaciones. En todo caso, existen muchos proverbios que caracterizan de modo sorprendente los diversos procesos que se siguen al resolver un problema, las consideraciones de sentido común, los "trucos" y los errores clásicos. Se encuentran muchas observaciones perspicaces —algunas incluso sutiles— pero sin presentarse, claro está, bajo la forma de un sistema científico, desprovistas de contradicciones y oscuridad. Por el contrario, la mayor parte de los proverbios se opone a otros que expresan exactamente la idea inversa, dejando sin embargo, todos ellos un gran margen de interpretación. Sería tonto considerar los proverbios como fuente indiscutible de sabiduría universalmente aplicable, pero sería lástima el descuidar la descripción gráfica de los procedimientos heurísticos que nos suministran.

Un trabajo interesante consistiría en reunir los proverbios relativos a la concepción de un plan, a la búsqueda de medios, a la elección de un comportamiento, en suma, agrupar todos aquellos que tratan el modo de resolver problemas. No disponemos aquí del espacio necesario para llevar al cabo tal trabajo; nos limitaremos, pues, a citar algunos de ellos para ilustrar las principales fases de la solución tal como las señala nuestra lista y que hemos tratado en diversas ocasiones, en particular en las secciones 6 a 14. Los proverbios citados se imprimirán en cursiva.

1. Lo que hace falta ante todo es comprender que: *Quien mal comprende, mal responde.* Tenemos que ver claramente los fines a los que tendemos: *En todo hay que considerar el fin.* Es un viejo consejo; "respice finem" decían ya en latín. Desgraciadamente no siempre se sigue y con frecuencia se reflexiona, se habla, se obra a tontas y a locas, sin haber comprendido realmente cuál es el propósito deseado. *El necio ve el principio, el sabio el final.* Si el fin perseguido no está claro en nuestra mente,

perderemos fácilmente el camino y abandonaremos el problema. *El sabio empieza por el final, el necio termina en el principio.*

Pero no basta comprender el problema, hay que desear también solucionarlo. No podremos resolver un problema difícil sin un gran deseo de hacerlo; pero si tal deseo existe, probablemente podremos. *Si quiero puedo.*

2. Trazar un plan, concebir la idea de la acción apropiada, es lo esencial para llegar a la solución de un problema.

Una buena idea es un golpe de suerte, una inspiración, un don de los dioses que hay que merecer: *Ayúdate y Dios te ayudará. La perseverancia mata la caza. No se derriba un roble de un hachazo.* Sin embargo, no basta repetir los intentos; debemos probar otros medios, cambiar de método. *Hay que probar todas las llaves del llavero.* Hemos de adaptar nuestros esfuerzos a las circunstancias. *Según el viento, la vela. Según la tela, el traje. Debemos hacer lo que podemos si no podemos hacer lo que queremos.* Si fracasamos, debemos intentar otro camino. *Es de sabios rectificar.* Desde el principio deberíamos esperar un posible fracaso y tener otro plan en reserva. *Hay que llevar dos cuerdas para el arco.* Si caemos en el error de cambiar de plan con excesiva frecuencia, quizá oigamos entonces el comentario irónico: *Para hacer y deshacer, el día es largo.* Corremos menos peligro de equivocarnos si no perdemos de vista nuestra meta. *El objeto de la pesca no es tirar el anzuelo sino sacar el pez.*

Nos esforzamos en extraer de la memoria lo que nos puede ser útil pero, con frecuencia, una idea eficaz que se presenta por sí misma pasa desapercibida. Un experto quizá no tenga más ideas que las que tiene un hombre sin experiencia, pero sabrá apreciarlas mejor y hará mejor uso de ellas. Sabrá poner todos los triunfos en juego. O quizá su ventaja reside en el hecho de estar continuamente alerta: *así podrá coger la ocasión por los pelos.*

3. Hay que poner el plan en ejecución en el momento oportuno, es decir, cuando ha madurado y no antes. No hay que hacerlo precipitadamente. *La prudencia es la madre de la seguridad. La noche trae su consejo.* Por otra parte, no hay que dudar mucho tiempo. *Quien nada arriesga nada pierde. El que no se arriesga no cruza el mar. La suerte es del audaz. Ayúdate y Dios te ayudará.*

Debemos emplear nuestro juicio para elegir el momento propicio. He aquí una advertencia pertinente que subraya el error más común, el fracaso más corriente de nuestro juicio: *Los deseos no son realidades.*

Nuestro plan, por lo general, nos da sólo una idea de conjunto. Tenemos que cuidar que los detalles encuadren en la línea general, para lo cual tenemos que examinar cuidadosamente cada detalle, uno tras otro. *Poco a poco el pájaro hace su nido. Zamora no se ganó en una hora.*

Al llevar a efecto nuestro plan debemos tener el cuidado de ordenar adecuadamente sus etapas, orden que por lo general es inverso al orden del descubrimiento. *Lo que un necio hace al final, un hombre cuerdo lo hace al principio.*

4. Una fase importante e instructiva del trabajo es volver a examinar la solución una vez que se ha obtenido. *No piensa bien quien no piensa dos veces.*

Gracias a este nuevo examen podemos confirmar el resultado. Hay que hacer observar al principiante que este tipo de confirmación tiene valor, que *valen más dos que una.*

5. Es esta una parte solamente de los proverbios relativos a la solución de problemas. Se podrían citar muchos más que, por ser del mismo tema, serían simples variaciones. Existen otros aspectos del desarrollo de la solución, más sistemáticos y más elaborados que no provienen ya de la Sabiduría de los Proverbios.

Al describirlos hemos tratado, sin embargo, de darles una presentación cercana a la forma de los proverbios, lo cual no es fácil. He aquí algunos de estos proverbios "sintéticos" que describen actitudes un tanto sofisticadas. El fin sugiere los medios.

Sus cinco mejores amigos son qué, por qué, dónde, cuándo y cómo. Pregúntese de qué se trata, pregúntese por qué, dónde, cuándo y cómo y no considere la opinión de nadie más.

No crea nada, pero reserve sus dudas para las cosas importantes.

Mire alrededor suyo cuando encuentre la primera seta: las setas como los descubrimientos no crecen nunca solas.

Simetría. La palabra comprende dos acepciones: una geométrica, particular, más usual, la otra lógica, general, menos difundida.

La geometría elemental en el espacio considera dos tipos de simetría: simetría con respecto a un plano (llamado plano de simetría) y la simetría con respecto a un punto (llamado centro de simetría). El cuerpo humano, que parece más bien simétrico, de hecho no lo es; muchos órganos internos están dispuestos de modo totalmente asimétrico. Por el contrario, una estatua puede ser perfectamente simétrica respecto de un plano vertical, de tal suerte que sus dos mitades parecen "intercambiables".

Según una acepción más general del término, un todo se dice simétrico si se compone de partes intercambiables. Existen numerosos tipos de simetría que difieren por el número de elementos intercambiables y por las operaciones que permiten los cambios entre ellos. Así, el cubo es de una simetría notable dado que sus seis caras son intercambiables, así como sus ocho vértices y sus doce aristas. Del mismo modo la expresión

$$yz + zx + xy$$

es simétrica; en efecto, se pueden cambiar entre sí dos letras cualesquiera sin modificar el conjunto.

La simetría. en el sentido general del término, ocupa un lugar importante en nuestro tema. Si un problema es simétrico bajo ciertos aspectos, puede ser ventajoso buscar sus elementos intercambiables y es con frecuencia útil tratar del mismo modo aquellos elementos que desempeñan el mismo papel. (Véase ELEMENTOS AUXILIARES, 3.)

Se debe procurar siempre tratar de modo simétrico lo que es simétrico, y no destruir a la ligera una simetría natural; sin embargo, no siempre es posible hacerlo. Un par de guantes es sin duda simétrico; no obstante, nadie los lleva de un modo enteramente simétrico, nadie se pone los dos guantes al mismo tiempo, sino uno tras otro. La simetría puede también servir para verificar un resultado; véase la sección 14.

Si no puede resolver el problema propuesto no se aflija exageradamente. Busque consuelo en un logro más fácil; *trate de resolver primero un problema relacionado al suyo;* quizá encuentre entonces valor para atacar de nuevo el problema original. No olvide que la superioridad del hombre consiste en rodear el obstáculo que no puede abordar directamente y que se puede concebir un problema auxiliar aplicable al problema original que parece insoluble.

¿Puede imaginar un problema relacionado más accesible? Ahora hace falta *inventar* un problema relacionado, no *solamente recordar* uno. Es de esperarse que ya se hayan formulado la pregunta: *¿Conoce algún problema relacionado?*

Las otras preguntas de aquella parte de la lista cuyo título es el del artículo presente, tienen una finalidad común, la VARIACIÓN DEL PROBLEMA. Existen diferentes medios de lograrla, tales como la GENERALIZACIÓN, la PARTICULARIZACIÓN, la ANALOGÍA, al igual que diversas maneras de DESCOMPONER Y RECOMPONER, página 73.

Términos antiguos y nuevos. Los términos antiguos y nuevos empleados para describir la actividad mental que consiste en resolver problemas son con frecuencia ambiguos. Dicha actividad es, sin embargo, familiar y se habla a menudo de ella, pero, como todo lo abstracto, es difícil de describir. En la ausencia de un estudio sistemático, no pueden emplearse términos técnicos, y en cuanto a los términos corrientes semitécnicos, éstos crean las más de las veces confusión, debido a su empleo en sentidos que varían según los autores.

La breve lista que sigue comprende algunos términos nuevos empleados en el estudio presente, mientras que de los términos antiguos unos se han evitado deliberadamente y otros se han conservado pese a su ambigüedad.

La siguiente discusión etimológica puede ser desconcertante para el lector si sus nociones no están sólidamente fundadas en ejemplos.

1. *El análisis* ha sido definido claramente por PAPPUS; es un término útil que describe un modo típico de concebir un plan a partir de la incógnita (o de la conclusión) regresando hacia los datos (o la hipótesis). Desgraciadamente, la palabra ha tomado poco a poco significados muy diferentes (análisis matemático, químico, lógico) y por ello hemos evitado, a nuestro pesar, dicho término en el estudio presente.

2. *La condición* relaciona los datos y la incógnita de un "problema por resolver" (véase PROBLEMAS POR RESOLVER, PROBLEMAS POR DEMOSTRAR). Tomada en ese sentido, es un término claro, útil e ineludible. Con frecuencia es necesario descomponer la condición en varias partes (en las partes I y II en los ejemplos de DESCOMPONER Y RECOMPONER EL PROBLEMA, 7, 8). Ahora bien, cada una de esas partes de *la* condición se llama también generalmente *una* condición. Esta ambigüedad, a veces molesta, puede fácilmente evitarse mediante la introducción de algún término técnico que designe a las partes de la condición completa; se puede, por ejemplo, llamarlas "cláusulas".

3. *La hipótesis* designa una parte esencial de un teorema matemático del tipo más usual (véase PROBLEMAS POR RESOLVER, PROBLEMAS POR DEMOSTRAR, 4). El término, en esa acepción, es perfectamente claro y satisfactorio. La dificultad proviene de que cada parte de *la* hipótesis se llama igualmente *una* hipótesis, lo cual se presta a confusión. El remedio consistiría en encontrar otra palabra, como "cláusula" por ejemplo, para designar cada parte de la hipótesis (compárese con la observación precedente sobre la "condición").

4. *Las principales partes* de un problema se definen en PROBLEMAS POR RESOLVER, PROBLEMAS POR DEMOSTRAR, 3, 4.

5. *Problemas por resolver, problemas por demostrar.* Son un par de nuevos términos introducidos aquí a nuestro pesar para reemplazar términos tradicionales cuyo significado ha sido cambiado por el uso corriente al grado de no poder pensar en restablecerlos. En traducciones latinas de textos matemáticos griegos, el nombre común a los dos tipos de problemas, es la palabra "propositio"; un "problema por resolver" se llama "problema", un "problema por demostrar", "theorema". En el lenguaje matemático en desuso, las palabras proposición, problema, teorema, tienen todavía ese significado "euclideano"; pero su significado ha cambiado en el lenguaje matemático moderno, lo cual justifica la introducción de términos nuevos.

6. *El razonamiento progresivo* ha sido empleado con diversos significados, según los autores, algunos de los cuales han respetado su antigua

acepción de "síntesis" (ver párrafo 9). Este último empleo se puede defender pero hemos evitado ese término.

7. *El razonamiento regresivo* ha sido empleado por algunos autores en su significado antiguo de "análisis" (compárense párrafos 1 y 6). Este último término es tan válido como el precedente; pero lo hemos evitado.

8. *La solución* es un término del todo claro si se toma en su significado puramente matemático; designa entonces todo objeto que satisfaga la condición de un "problema por resolver". Así, las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ son sus raíces, es decir, los números 1 y 2. Desgraciadamente la palabra tiene otras acepciones, no puramente matemáticas y no obstante empleadas a veces por matemáticos al lado de su acepción matemática. Se puede, en efecto, emplearla en el sentido de "la acción de resolver un problema" o "el trabajo efectuado al resolver un problema"; es lo que entendemos cuando hablamos de una "solución difícil". La solución puede también designar el resultado del trabajo efectuado para resolver un problema; es el significado que se la da a la palabra en la expresión "una bonita solución". Resulta, pues, que si en una misma frase tenemos que hablar del objeto que satisface la condición del problema, del trabajo por efectuar para obtenerlo, y del resultado de ese trabajo, y nos valemos, en los tres casos, de la palabra "solución", la frase corre el riesgo de ser poco clara.

9. La palabra *síntesis* ha sido empleada por PAPPUS en un sentido bien definido que amerita conservarse. Muy a pesar nuestro en el presente estudio hemos evitado este término, por las mismas razones que en su contrapartida "análisis" (véase párrafo 1).

Trabajo subconsciente. Una noche deseaba hablar a un amigo de un cierto autor de cuyo nombre no pude acordarme. Eso me exasperó, máxime que me acordaba muy bien de una de sus novelas. Recordaba también una anécdota de este autor que quería contar. En suma, recordaba todo acerca de él, menos su nombre, y los esfuerzos repetidos que hice por recordarlo resultaron vanos. Sin embargo, a la mañana siguiente, al tiempo que pensaba en la decepción de la pasada noche, el nombre en cuestión me vino a la mente sin el menor esfuerzo.

Cada uno de nosotros recuerda sin duda, alguna experiencia personal de ese tipo. Todo aficionado e investigador de problemas habrá sufrido la experiencia probablemente en el transcurso de su trabajo. Sucede con frecuencia quedarse completamente en blanco ante un problema, pese a los mayores esfuerzos. Pero cuando se vuelve a él tras una noche de reposo o después de una interrupción de varios días, puede ocurrírsenos una idea brillante que permite resolverlo fácilmente. Poco importa la naturaleza del problema, una palabra olvidada, un término difícil en un crucigrama,

el principio de una carta delicada pueden, al igual que la solución de un problema matemático, presentarse en la mente de este modo.

Tales hechos dan la impresión de un *trabajo subconsciente.* Cierto es que un problema, después de una "ausencia" prolongada, puede presentársenos con una nueva claridad, más cercano a ser resuelto que en el momento que hemos dejado de pensar en él. ¿Quién lo ha esclarecido? ¿Quién lo ha traído al camino de la solución? Nosotros mismos, claro está, pero trabajando en él *inconscientemente.* Es difícil dar otra explicación, pese a que los psicólogos hayan descubierto el resquicio de una respuesta diferente que quizá un día sea más satisfactoria.

Cualesquiera que sean los méritos de una "teoría" del trabajo subconsciente, es seguro que existe un límite más allá del cual no es conveniente forzar la reflexión consciente. A partir de cierto momento es preferible dejar descansar el problema durante un cierto tiempo. "La noche trae consejo" dice el viejo proverbio. Acordando una tregua al problema y a nosotros mismos, podemos obtener más al día siguiente con menos esfuerzo. "Hoy no, mañana sí." No obstante no debemos abandonar, antes de haber hecho algún progreso, un problema sobre el cual tenemos la intención de volver más tarde. No dejemos el trabajo, provisionalmente, sin haber captado algún detalle, elucidado aunque sea algún aspecto de la cuestión.

Sólo vuelven a la mente, transformados, aquellos problemas que nos han apasionado o los que nos han mantenido en una tensión mental considerable; el esfuerzo consciente y la tensión intelectual parecen necesarios para hacer trabajar al subconsciente. Si no fuese así, la cosa sería muy simple, ya que podríamos resolver los problemas más difíciles durmiendo tranquilamente o esperando la "idea".

Antiguamente se consideraba a la idea brillante como una inspiración, un don de los dioses; hay que merecer ese don por el trabajo o, al menos, por un ardiente deseo.*

Variación del problema. Un insecto —ya hemos mencionado el hecho— hace intentos de escapar a través de un vidrio, repitiendo indefinidamente esfuerzos vanos, sin tratar de pasar por la ventana vecina que está abierta y por la cual entró en la pieza. Un ratón procede quizá en forma menos absurda; caído en la ratonera, trata de escaparse entre dos barrotes, después a través de los dos siguientes y así variando sus tentativas, prueba diversas posibilidades. Un hombre debe ser capaz de variar sus tentativas de un modo todavía más inteligente, debe examinar las diversas posibilidades con mayor comprensión, aprender algo de sus errores y sus tanteos. "Trate, trate de nuevo", es un buen consejo que siguen tanto, el insecto y el ratón,

* Para un estudio a fondo del "pensamiento inconsciente" véase de Jacques Hadamard, *The Psichology of Invention in the Mathematical Field.*

como el hombre; pero si este último tiene más éxito se debe a que *varía su problema* de modo más inteligente.

1. Cuando hemos logrado la solución y ponemos punto final a nuestro estudio, nuestra concepción del problema es más completa y está mejor adaptada a la cuestión que en un principio. Para ir de la concepción inicial a otra más completa, mejor adaptada al problema, hemos ensayado diversos puntos de vista y hemos considerado el problema bajo diferentes aspectos.

El éxito depende de la elección del punto de vista, del ataque por el lado accesible. Para encontrar dicho punto de vista, dicho lado, examinamos varios aspectos, *variamos el problema.*

2. La variación del problema es esencial. Es un hecho que puede explicarse de diversos modos. Es así como el progreso en la solución de un problema puede aparecer como una movilización y una organización de los conocimientos previamente adquiridos. Debemos "extraer" de nuestra memoria ciertos elementos y hacerlos entrar en nuestro problema. Ahora bien, la variación del problema va a ayudarnos en esta empresa. ¿Cómo?

Recordamos los hechos mediante una especie de "acción por contacto" llamada "asociación mental"; lo que tenemos "in mente" en un momento dado tiende a recordarnos lo que había estado en contacto con ello en una circunstancia anterior. (No es aquí el lugar ni el momento de enunciar más claramente la teoría de la asociación ni de discutir sus límites.) *Variando el problema,* aportamos nuevos detalles, creamos nuevos contactos, nuevas posibilidades de entrar en contacto con elementos capaces de intervenir en la cuestión que nos ocupa.

3. No podemos esperar resolver un problema digno de ese nombre sin una intensa concentración; pero tal tensión mental, dirigida sobre un mismo objeto, acarrea pronto una fatiga que puede ser excesiva. Para que nuestra atención no desfallezca, hay que cambiar repetidamente el objeto sobre la cual se proyecta.

Cuando nuestro trabajo adelanta, constantemente hay medidas qué tomar, nuevas cuestiones por examinar, nuestra atención y nuestro interés se mantienen despiertos. Pero si no adelantamos la atención se debilita, el interés languidece, intervienen la fatiga y el aburrimiento, nuestra mente comienza a vagar y corremos el riesgo de perder el hilo del problema. El medio de escapar de esto es entonces *plantearse una nueva pregunta.*

Esa nos va a revelar posibilidades inexploradas de contacto con nuestros conocimientos precedentes, va a hacer renacer en nosotros la esperanza de encontrar contactos útiles; *conquista de nuevo nuestro interés variando el problema* del cual nos muestra un nuevo aspecto.

4. *Ejemplo.* Encontrar el volumen de una pirámide truncada de base

cuadrada, conociendo el lado de la base inferior a, el de la base superior b y la altura h.

Este problema se puede plantear a alumnos que conozcan bien las fórmulas del volumen del prisma y de la pirámide. Si no toman la delantera proponiendo sus ideas personales, el profesor comenzará por hacer *variar los datos.* Partamos de una pirámide truncada en la cual $a > b$. ¿Qué sucede cuando b aumenta hasta llegar a ser igual a a? La pirámide truncada se convierte en un prisma y el volumen considerado es a^2h. ¿Qué sucede cuando b disminuye hasta llegar a ser 0? La pirámide truncada se convierte en una pirámide cuyo volumen es $\frac{a^2h}{3}$.

Esta variación de los datos contribuye, ante todo, al interés del problema. Después puede sugerir la idea de emplear, de un modo o de otro, los resultados conocidos relativos al prisma y a la pirámide. En todo caso, hemos descubierto ciertas propiedades del resultado final: la fórmula por determinar debe ser tal que pueda reducirse a a^2h para $b = a$ y a $\frac{a^2h}{3}$ para $b = 0$. Tratemos de prever las propiedades del resultado que queremos obtener. Tales propiedades pueden suministrarnos sugerencias interesantes y, de todos modos, una vez encontrada la fórmula final, estaremos en condiciones de verificarla. Tenemos así, por adelantado, una respuesta a la pregunta: ¿PUEDE COMPROBAR EL RESULTADO? (Véase párrafo 2.)

5. *Ejemplo.* Construir un trapecio dados sus cuatro lados a, b, c, d.

Sea a la base inferior, c la base superior; a y c paralelos pero desiguales, b y d no son paralelos. Si no tenemos otra idea, podemos empezar por variar los datos.

Partamos de un trapecio en el cual $a > c$. ¿Qué sucede cuando c disminuye hasta llegar a 0? El trapecio se transforma en triángulo. Ahora bien, un triángulo es una figura sencilla que nos es familiar, que podemos construir a partir de diversos datos. Puede ser interesante hacer aparecer ese triángulo en la figura. Lo hacemos trazando simplemente una línea auxiliar que será una diagonal del trapecio (fig. 29).

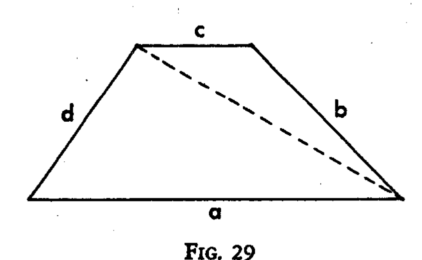


FIG. 29

Examinando el triángulo no nos parece, sin embargo, de gran utilidad; conocemos dos de sus lados *a* y *d*, pero nos harían falta tres datos.

Probemos alguna otra cosa. ¿Qué sucede cuando *c* aumenta hasta llegar a ser igual a *a*? El trapecio se convierte en un paralelogramo. ¿Podemos emplearlo? Un examen rápido (véase fig. 30) nos llama la atención sobre el triángulo que hemos añadido al trapecio primitivo al construir el paralelogramo.

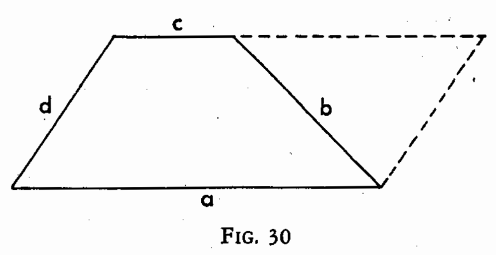


FIG. 30

Dicho triángulo es fácil de construir puesto que conocemos sus tres lados, *b*, *d* y $a - c$.

Al variar el problema inicial (construcción del trapecio) hemos llegado a un problema auxiliar más accesible (construcción del triángulo). Utilizando después el resultado de ese problema auxiliar resolvemos fácilmente el problema original (hasta completar el paralelogramo).

Nuestro ejemplo es típico, como lo es también el fracaso de nuestra primera tentativa. Volviendo sobre ella, constatamos sin embargo, que no ha sido inútil. Había en ella una idea, la que nos ha permitido pensar en construir un triángulo, dándonos así un medio de alcanzar nuestro objetivo. Si lo hemos logrado en nuestro segundo intento ha sido modificando un primer ensayo infructuoso; se trataba en los dos casos, en efecto, de una variación de *c*, que hemos tratado primero de disminuir y después de aumentar.

6. Como en el ejemplo anterior, así tendremos que intentar con frecuencia diversas modificaciones del problema. Hay que variarlo, enunciarlo de modo diferente, transformarlo hasta encontrar al fin lo que puede sernos útil. Podemos incluso sacar partido de un fracaso, ya que a veces en una tentativa fallida puede haber una buena idea que, una vez *modificada*, puede conducirnos a un ensayo más fructífero. Lo que obtenemos tras diversos ensayos es la mayor parte de las veces, como en el precedente ejemplo, un problema auxiliar más accesible.

Existen ciertos procedimientos particularmente útiles para variar el problema como, por ejemplo, el referirse a la DEFINICIÓN, DESCOMPONER Y RECOMPONER EL PROBLEMA, introducir ELEMENTOS AUXILIARES, utilizar medios como la GENERALIZACIÓN, la PARTICULARIZACIÓN y el empleo de la ANALOGÍA.

8. Las indicaciones que hemos dado en el párrafo 3 acerca de nuevas preguntas que pueden reanimar el interés del investigador, facilitarán el empleo juicioso de nuestra lista.

Un profesor puede utilizar esta lista para ayudar a sus alumnos; pero hay alumnos que no necesitan ayuda y a quienes no tendrá que plantear ninguna pregunta, sino más bien permitirles trabajar solos, lo que evidentemente es mejor para su independencia intelectual. Debe simplemente el profesor tratar de encontrar el medio de ayudar a cada uno de esos buenos alumnos por medio de alguna pregunta o sugerencia apropiada en el momento que se encuentren estancados en su trabajo. Porque entonces, hay que evitar por todos los medios que el alumno se canse del problema y lo abandone o que pierda el interés y cometa por pura indiferencia algún error garrafal.

Podemos emplear la lista para resolver nuestros propios problemas. Para emplearla en forma apropiada, procederemos como en el primer caso. En el caso de un adelanto satisfactorio, cuando nuevas observaciones se presentan por sí mismas, sería tonto frenar el progreso espontáneo por medio de preguntas superfluas. Pero cuando estamos varados, cuando no tenemos ninguna otra idea, corremos el riesgo de cansarnos del problema. Es entonces el momento de pensar en alguna idea general que pudiera servirnos, una pregunta o una sugerencia de la lista que pudiera aplicarse. Y acogeremos con alegría cualquier nueva pregunta que, con algo de suerte, pudiera revelarnos un nuevo aspecto del problema que despierte nuestro interés y nos haga trabajar y reflexionar.

Cuarta parte

Problemas, sugerencias, soluciones

Esta última parte ofrece al lector la oportunidad de practicar con ejercicios.

Los problemas no requieren mayores conocimientos que los que el lector haya adquirido en los estudios de enseñanza media. Sin embargo, no son problemas de meras aplicaciones de fórmulas, ni son muy fáciles; algunos de ellos requieren cierta originalidad e ingenio.*

Las sugerencias ofrecen indicaciones que conducen al resultado, citando, sobre todo, alguna frase apropiada de la lista; a un lector muy atento, pronto a captar las sugerencias, le pueden dar la idea clave de la solución.

Las soluciones no sólo traen la respuesta, sino también el método que a ella conduce, no obstante el lector debe suplir algunos detalles. Algunas de ellas tratan de abrir nuevos horizontes, por medio de algunas palabras al final.

El lector que ha tratado seriamente de resolver el problema, puede sacar provecho de las sugerencias y soluciones. Si por sí mismo llega al resultado, puede aprender algo comparando su método con el que se expone aquí. Si después de un gran esfuerzo se siente inclinado a abandonar el problema, las sugerencias pueden darle la idea que le falta. Si las sugerencias mismas no le ayudan, puede ver la solución, tratar de ver la idea clave y, haciendo el libro a un lado, tratar de encontrar la solución.

PROBLEMAS

1. Partiendo de un punto P, un oso camina un kilómetro hacia el sur. Cambia entonces de dirección y recorre un kilómetro hacia el este. Después, dando vuelta de nuevo a la izquierda, recorre un kilómetro hacia el norte para llegar exactamente al punto de partida P. ¿De qué color es el oso?

2. Roberto quiere un terreno, absolutamente horizontal, delimitado

* Excepto el primero (muy conocido, pero muy divertido como para omitirlo) todos los problemas se han tomado de los *Stanford University Competitive Examinations in Mathematics* (salvo algunas ligeras modificaciones). Algunos de ellos se han publicado en *The American Mathematical Monthly* o en *The California Mathematics Council Bulletin.* En esta última revista, el autor ha publicado algunas soluciones que se encontrarán más adelante, convenientemente modificadas.

por cuatro líneas rectas. Dos de esas rectas están exactamente dirigidas norte-sur, las otras dos exactamente este-oeste y cada una mide exactamente 1 000 metros. ¿Puede comprar Roberto ese terreno en México?

3. Roberto tiene 10 bolsillos y 44 monedas de plata. Quiere poner las monedas en los bolsillos repartiéndolas de tal modo que cada bolsillo contenga un número diferente de monedas. ¿Puede hacerlo?

4. Para enumerar las páginas de un libro un tipógrafo ha empleado 2 989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

5. Entre los papeles del abuelo se ha encontrado una nota:

72 pavos, $ — 67.9 —

El primero y el último dígito del número que, evidentemente, representaba el precio total de las aves, se han reemplazado aquí por guiones, dado que estaban borrados y no se podían leer.

¿Cuáles son los dos dígitos borrados y cuál era el precio de un pavo?

6. Dado un hexágono regular y un punto en su plano, trazar una recta que pase por el punto y divida al hexágono en dos partes de áreas iguales.

7. Se da un cuadrado. Encontrar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve al cuadrado bajo un ángulo (a) de 90° (b) de 45°. (Sea P un punto fuera del cuadrado, pero en su plano. El menor ángulo con vértice en P en el cual el cuadrado está inscrito es "el ángulo bajo el cual el cuadrado se ve" desde P.) Dibujar claramente los dos lugares geométricos y dar todos sus elementos.

8. Llamemos "eje" de un sólido a una línea recta que una dos puntos de su superficie y tal que por rotación, en torno a esa recta, de un ángulo comprendido entre 0° y 360°, el sólido coincide consigo mismo.

Encontrar los ejes de un cubo. Definir claramente la posición de los ejes y determinar el ángulo de rotación relativo a cada uno de ellos. Suponiendo que se toma como unidad la arista del cubo, calcular la media aritmética de las longitudes de los ejes.

9. En un tetraedro cualquiera, dos aristas opuestas tienen la misma longitud a y son ortogonales. Además, cada una de esas aristas es perpendicular a la línea, de longitud b, que une sus puntos medios. Expresar el volumen del tetraedro en función de a y b, y demostrar el resultado obtenido.

10. Se llama *ápex* de una pirámide al vértice opuesto a la base.

a) Llamemos "isósceles" a una pirámide cuyo ápex está a igual distancia de todos los *vértices* de la base. Con dicha definición, demostrar que la base de una pirámide isósceles está *inscrita* en un círculo cuyo centro es el pie de la altura de la pirámide.

b) Llamemos, ahora, "isósceles" a una pirámide tal que las perpendiculares bajadas del vértice a los lados de la base sean iguales. Con esta definición (diferente de la anterior) demostrar que la base de una pirámide isósceles está *circunscrita* a un círculo cuyo centro es el pie de la altura de la pirámide.

11. Encontrar x, y, u, y z que satisfagan el sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 7y + 3u + 5z &= 16 \\ 8x + 4y + 6u + 2z &= -16 \\ 2x + 6y + 4u + 8z &= 16 \\ 5x + 3y + 7u + z &= -16 \end{aligned}$$

(Esto puede parecer largo y tedioso: búsquese un procedimiento rápido.)

12. Roberto, Pedro y Pablo viajan juntos. Pedro y Pablo son buenos caminantes; cada uno camina p kilómetros por hora. Roberto tiene un pie lastimado y conduce un pequeño automóvil de dos plazas solamente, donde tres no caben; recorre c kilómetros por hora. Los tres amigos adoptan el siguiente plan: Partir juntos, Pablo y Roberto en el automóvil, Pedro a pie. Después de algún tiempo, Pablo desciende del coche y sigue a pie mientras que Roberto regresa en busca de Pedro; después Roberto y Pedro van en coche hasta que alcanzan a Pablo. En ese momento cambian: Pablo sube al coche y Pedro camina, como al principio; todo el ciclo se repite tantas veces cuantas sea necesario.

a) ¿Cuántos kilómetros por hora adelanta el grupo?

b) ¿Durante qué fracción de tiempo del viaje, sólo hay una persona en el automóvil?

c) Verificar los casos extremos $p = 0$ y $p = c$.

13. Tres números forman una progresión aritmética y otros tres, una progresión geométrica. Sumando los términos correspondientes de las dos progresiones se obtiene

85, 76 y 84

respectivamente; sumando los tres términos de la progresión aritmética se obtiene 126. Encontrar los términos de las dos progresiones.

14. Determinar m tal que la ecuación en x

$$x^4 - (3m + 2)\,x^2 + m^2 = 0$$

tenga cuatro raíces en progresión aritmética.

15. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 60 cm, la altura perpendicular a la hipotenusa mide 12 cm. Determinar los lados.

16. De la cima de una montaña se ven dos puntos A y B en la planicie. Las líneas de visión dirigidas a estos puntos determinan el ángulo γ. La primera tiene una inclinación α con relación al horizonte, la segunda una inclinación β. Se sabe que los puntos A y B están en un mismo plano horizontal y que la distancia entre ellos es c.

Expresar la altura x de la cima respecto del plano horizontal que contiene a A y B en función de los ángulos α, β y γ y de la distancia c.

17. Observando que el valor de

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$$

es $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{23}{24}$ para $n = 1, 2, 3$, respectivamente, recuerde la ley general (considerando más valores si es necesario) y demuestre que la hipótesis es exacta.

18. Considérese la tabla

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 + 5 &= 8 \\ 7 + 9 + 11 &= 27 \\ 13 + 15 + 17 + 19 &= 64 \\ 21 + 23 + 25 + 27 + 29 &= 125 \end{aligned}$$

Deduzca la ley general sugerida por esos ejemplos, exprésela por medio de una fórmula matemática apropiada y demuéstrela.

19. El lado de un hexágono regular mide n (siendo n un número entero). Por medio de paralelas equidistantes a sus lados, se divide el hexágono en T triángulos equiláteros de lado 1. Sea V el número de vértices resultantes de esta división y L el número de lados de longitud 1. (Un lado pertenece a uno o dos triángulos, un vértice a dos o más de dos triángulos.) Cuando $n = 1$, lo que es el caso más sencillo, $T = 6$, $V = 7$, $L = 12$. Considérese el caso general y exprésese T, V y L en función de n. (Hacer una hipótesis está bien, demostrarla es mejor.)

20. ¿De cuántas maneras se puede cambiar un peso en monedas? (La manera de cambiar está determinada cuando se conoce el número de piezas de cada valor —uno, cinco, diez, veinticinco y cincuenta centavos que se utilizan.)

SUGERENCIAS

1. *¿Cuál es la incógnita?* El color del oso. Pero, ¿cómo se puede encontrar el color de un oso a partir de datos matemáticos? *¿Cuál es el dato?* Una situación geométrica —pero que parece contradictoria a sí misma. ¿Después de recorrer tres kilómetros de la manera descrita, cómo puede el oso regresar al punto de *partida?*

2. *¿Conoce usted algún problema análogo a éste?*

3. Si Roberto tuviese un gran número de monedas no tendría dificultad en llenar sus bolsillos de manera diferente. *¿Puede usted plantear el problema de otro modo?* ¿Cuál es el número mínimo de monedas que se pueden meter en diez bolsillos de tal suerte que cada bolsillo contenga un número diferente de monedas?

4. *He aquí un problema relacionado con el suyo.* Si el libro tiene exactamente nueve páginas numeradas, ¿cuántos dígitos emplea el tipógrafo? (9 evidentemente). He aquí otro problema *en relación con el suyo*: si el libro tiene exactamente 99 páginas, ¿cuántos dígitos emplea el tipógrafo?

5. *¿Puede usted plantear el problema en otra forma?* ¿Cuáles pueden ser los dos números borrados si el precio total, expresado en centavos, es divisible por 72?

6. *¿Puede imaginar algún problema más fácil relacionado con éste?; ¿Un problema más general?; ¿un problema análogo?* (Véase GENERALIZACIÓN, 2).

7. *¿Conoce usted algún problema relacionado con éste?* El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento de recta dado desde un ángulo dado se compone de dos arcos de círculo, cuyos extremos coinciden con los del segmento y son simétricos con relación al segmento.

8. Supongo que el lector está familiarizado con la forma de un cubo y que, por medio de un simple examen, ha encontrado algunos de sus ejes; pero ¿los ha encontrado *todos?; ¿puede demostrar que su enumeración de* ejes es exhaustiva?; ¿descansa esta enumeración sobre algún principio claro de clasificación?

9. *Mire la incógnita.* La incógnita es el volumen de un tetraedro. Sí, ya sé, se puede calcular el volumen de una pirámide conocida la base y altura (la tercera parte del producto de los dos factores), pero aquí no se conoce ni la base ni la altura. *¿Puede imaginar algún problema más sencillo que se relacione con este?* (¿No ve usted un tetraedro más sencillo que es una parte alícuota del que se da?)

10. *¿Conoce algún teorema que se relacione con esta pregunta?; ¿conoce* usted algún *teorema análogo*... más sencillo... que se relacione? Sí: en un triángulo isósceles, el punto medio de la base es el pie de la altura correspondiente al vértice opuesto. He ahí un *teorema que se relaciona con este último y que ya se ha demostrado. ¿Puede utilizar el método?* El teorema sobre el triángulo isósceles se demuestra considerando dos triángulos rectángulos iguales que tienen por lado común la altura del triángulo.

11. Se supone que el lector está familiarizado con los sistemas de ecuaciones lineales. Para resolver tal sistema, hay que combinar las ecuaciones de algún modo y buscar si, entre éstas, hay relaciones que pudiesen poner en evidencia una combinación particularmente ventajosa.

12. *Separe las diferentes partes de la condición. ¿Puede precisarlas por escrito?* Entre el momento en que los tres amigos parten y el momento en que se encuentran de nuevo, hay tres fases diferentes.

1) Roberto y Pablo en automóvil.
2) Roberto en automóvil solo.
3) Roberto y Pedro en automóvil.

Llamaremos, respectivamente, t_1, t_2, t_3, las duraciones de esas fases. ¿Cómo podemos descomponer la condición de manera apropiada?

13. *Separe las diferentes partes de la condición. ¿Puede precisarlas por escrito?* Sean

$$a - d, \quad a, \quad a + d$$

los términos de una progresión aritmética, y

$$bg^{-1}, \quad b, \quad bg$$

los de una progresión geométrica.

14. *¿Cuál es la condición?* Las cuatro raíces deben estar en progresión aritmética. La ecuación tiene, sin embargo, una característica particular: sólo contiene potencias pares de la incógnita x. Por lo tanto, si a es una raíz, $-a$ es también raíz de la ecuación.

15. *Separe las diferentes partes de la condición. ¿Puede precisarlas por escrito?* Se pueden, en la condición, distinguir tres partes relativas a

1) El perímetro
2) al triángulo rectángulo
3) a la altura bajada sobre la hipotenusa.

16. *Separe las diferentes partes de la condición. ¿Puede precisarlas por escrito?* Sean a y b las longitudes (desconocidas) de PA y de PB, α y β, respectivamente, sus inclinaciones con relación al plano horizontal. Se pueden, en la condición, distinguir tres partes relativas a

1) La inclinación de a
2) la inclinación de b
3) el triángulo que tiene por lados a, b y c.

17. *¿Reconoce* usted los denominadores 2, 6, 24? *¿Conoce algún problema relacionado?; ¿un problema análogo?* (Véase INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA.)

18. Para descubrir por inducción hay que observar. Observe los segundos miembros; los primeros términos de los primeros miembros, después los últimos. ¿Cuál es la ley general?

19. *Haga una figura.* Su examen podrá ya sea ayudarle a encontrar la ley por inducción, ya sea llevarle a las relaciones entre T, V, L y n.

20. *¿Cuál es la incógnita?;* ¿qué se nos pide buscar? Puede ser necesario precisar un poco el objeto del problema. *¿Puede imaginar algún problema que se relacione con éste y sea más sencillo?; ¿algún problema más general?; ¿algún problema análogo?* He aquí un problema análogo *muy* sencillo: ¿De cuántas maneras puede usted pagar un centavo? (Sólo hay un modo.) He aquí un problema más general: ¿De cuántas maneras puede usted pagar la cantidad de n centavos, utilizando las cinco monedas siguientes: uno, cinco, diez, veinticinco y cincuenta centavos? Nuestro problema particular es el caso para $n = 100$.

En los casos particulares más sencillos, para los valores pequeños de n, podemos cifrar la respuesta sin método complicado, simplemente ensayando y examinando.

He aquí una tabla (que el lector deberá verificar).

n	4	5	9	10	14	15	19	20	24	25
E_n	1	2	2	4	4	6	6	9	9	13

La primera fila enumera las cantidades por pagar, de valor general n; la segunda fila enumera los números de "modos de pagar" correspondientes, de valor general E_n. (El motivo de la elección de esta notación es un secreto personal que no quiero revelar en este momento.)

Tenemos que considerar el caso particular E_{100}, pero sin método claro es dudoso que podamos calcular E_{100}. De hecho este problema exige del lector un poco más que los precedentes: debe *crear* una pequeña teoría.

Nuestra pregunta es general (se trata de calcular E_n para el valor general n, pero está "aislada"). *¿Puede imaginar algún problema relacionado más fácil?; ¿algún problema análogo?* He aquí un problema análogo *muy* sencillo: Encontrar A_n, el número de procedimientos de pagar la cantidad de n centavos utilizando sólo centavos ($A_n = 1$).

SOLUCIONES

1. ¿Piensa usted que el oso es blanco y que el punto P es el Polo Norte?; *¿puede demostrarlo?* Como se ha podido comprender, hemos idealizado la pregunta. Consideramos la tierra como exactamente esférica y al oso como un punto material móvil. Dicho punto describe un arco de *meridiano* al desplazarse hacia el sur o hacia el norte, y un arco de *paralelo* (paralelo al ecuador) al desplazarse hacia el este. Hay que distinguir dos casos:

1) Si el oso regresa al punto P siguiendo un meridiano *diferente* del que ha seguido al salir de P, dicho punto es necesariamente el Polo Norte. De hecho el otro único punto de la tierra en el que dos meridianos se encuentran es el Polo Sur, pero el oso no podría salir de ese Polo más que desplazándose hacia el norte.

2) El oso podría regresar al punto P siguiendo el mismo meridiano que al salir de P si, al desplazarse un kilómetro hacia el este, describiese n paralelos completos, pudiendo ser n igual a 1, 2, 3 . . . En dicho caso, P no es el

Polo Norte, sino un punto de un paralelo muy cercano al Polo Sur (cuya longitud, expresada en kilómetros, es un poco inferior a $2\pi + \frac{1}{n}$).

2. Representamos a la tierra como en la solución del problema 1. El terreno que quiere Roberto está limitado por dos meridianos y dos paralelos. Imagine dos meridianos fijos y un paralelo *alejándose* del ecuador: el arco de ese paralelo móvil interceptado por los dos meridianos fijos disminuye constantemente. El centro del terreno tendría que estar en el ecuador. Roberto *no* puede comprarlo en México.

3. El mínimo número de monedas puestas en un bolsillo evidentemente es 0. El número inmediato superior es por lo menos, 1; el número inmediato superior a éste es cuando menos, 2, . . . y el número de monedas puestas en el último (décimo) bolsillo es cuando menos, 9. El número de monedas necesarias es, pues, por lo menos

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 9 = 45$$

Roberto no puede lograrlo: sólo tiene 44 monedas.

4. Para un libro de 999 páginas se necesitan

$$9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 = 2\,889$$

dígitos. Si el libro en cuestión tiene X páginas,

$$2\,889 + 4\,(x - 999) = 2\,989$$
$$x = 1\,024$$

Este problema nos hace ver que una evaluación preliminar de la incógnita puede ser útil (o incluso necesaria, como en este caso).

5. Si el número —679— es divisible por 72, lo es también a la vez por 8 y por 9. Siendo divisible por 8, el número 79— debe ser también divisible por 8 (ya que 1 000 es divisible por 8), 79— debe ser, pues, 792: la última cifra borrada es 2. Si —6792 es divisible por 9, la suma de los dígitos de ese número debe serlo también (regla de "la prueba por 9"), la primera cifra borrada debe ser, pues, 3. El precio 367.92 ÷ 72 = 5.11 pesos.

6. "Se dan en el mismo plano, con sus posiciones, *un punto y una figura que tiene un centro de simetría.* Determinar una recta que pase por el punto y divida a la figura en dos partes de áreas iguales." La recta que se pide pasa naturalmente por el centro de simetría. Véase PARADOJA DEL INVENTOR, página 138.

7. En cualquier posición del ángulo, sus dos lados deben pasar por dos vértices del cuadrado. Considerando dos de esos vértices, el vértice del ángulo se desplaza sobre el mismo arco de circunferencia (según el teorema indicado en Sugerencias). De donde se deduce que cada uno de los dos lugares geométricos requeridos se componen de varios arcos de circunferencia: cuatro semicircunferencias en el caso (a), ocho cuartos de circunferencia en el caso (b); véase figura 31.

8. El eje atraviesa la superficie del cubo en un punto que está ya sea en un vértice, en una arista o en una cara. Si el eje pasa por un punto de una arista (excluídos sus extremos), dicho punto debe ser el punto medio de la arista; de otro modo la arista no podría coincidir consigo misma por

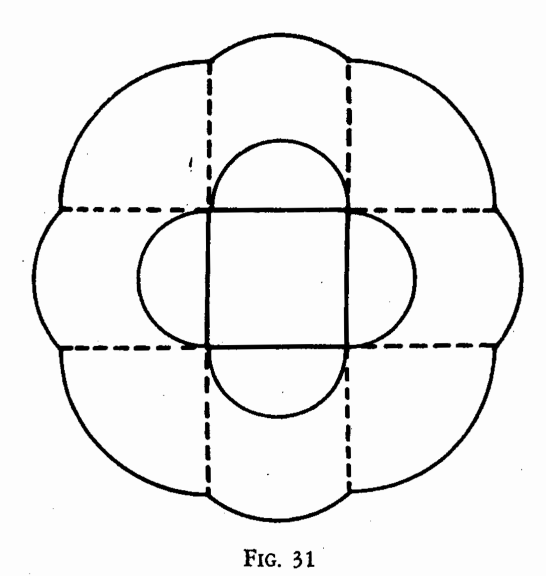


FIG. 31

rotación. Análogamente, el eje que atraviese una cara debe pasar por su centro. Cualquier eje debe, naturalmente, pasar por el centro del cubo. Hay, pues, tres clases de ejes:

1) Cuatro ejes cada uno de los cuales pasa por dos vértices opuestos; sus ángulos son de 120° y 240°.

2) Seis ejes que pasan, cada uno, por los puntos medios de dos aristas opuestas; su ángulo es de 180°.

3) Tres ejes que pasan, cada uno, por los centros de dos caras opuestas; sus ángulos son de 90°, 180° y 270°.

En cuanto a la longitud de un eje de la primera especie, véase la sección **12**; los otros son más fáciles de calcular. La media pedida es

$$\frac{4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 3}{13} = 1\,416$$

(Este problema puede preparar útilmente al lector para el estudio de la cristalografía. Para el lector que tenga amplios conocimientos del cálculo

integral, se puede advertir que la media calculada es una buena aproximación de la "longitud media" del cubo que es, en efecto, $\frac{3}{2} = 1.5$.)

9. El plano determinado por una arista de longitud a y la perpendicular, de longitud b, divide al tetraedro en otros dos tetraedros iguales, *más sencillos,* cada uno de los cuales tiene por base $\frac{ab}{2}$ y por altura $\frac{a}{2}$.

El volumen pedido es, pues, igual a

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2 b}{6}$$

10. La base de la pirámide es un polígono de n lados. En el caso (a) las n aristas laterales de la pirámide son iguales; en el caso (b) las alturas de sus n caras laterales (bajadas del vértice) son iguales. Si del vértice de la pirámide bajamos la altura sobre la base y si unimos el pie de dicha altura ya sea a los n vértices de la base en el caso (a), ya sea a los pies de las alturas de las n caras laterales en el caso (b), obtenemos en los dos casos n *triángulos rectángulos que tienen por lado común la altura de la pirámide:* Digo que esos n triángulos rectángulos son iguales. En efecto, según las definiciones dadas en el problema actual, sus hipotenusas (que son aristas laterales en el caso (a) y alturas en el caso (b) tienen la misma longitud en todos esos triángulos; nos hemos limitado a indicar que tienen en común otro lado (la altura de la pirámide) y un ángulo (el ángulo recto). En los n triángulos iguales, los terceros lados deben ser también iguales; parten del mismo punto (el pie de la altura) y están en un mismo plano (el de la base); constituyen n radios de una circunferencia que es o circunscrita a la base de la pirámide en el caso (a) o inscrita a dicha base en el caso (b). [En el caso (b) falta, sin embargo, demostrar que los n radios mencionados son perpendiculares a los lados respectivos de la base: esto se deduce de un teorema muy conocido en la geometría del espacio sobre proyecciones.]

Debe notarse que una figura plana, un triángulo isósceles, pueden corresponder, en el espacio, a *dos figuras análogas diferentes.*

11. Obsérvese que hay la misma relación entre las ecuaciones primera y última que entre la segunda y la tercera: los coeficientes de los primeros miembros son los mismos, pero en orden inverso, mientras que los segundos miembros tienen valores opuestos. Súmense la primera ecuación y la última, después la segunda y la tercera:

$$6(x + u) + 10(y + z) = 0$$
$$10(x + u) + 10(y + z) = 0$$

Se puede considerar esto como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, $x + u$ y $y + z$, del cual se obtiene fácilmente

$$x + u = 0 \qquad y + z = 0$$

Sustituyendo $-x$ por u y $-y$ por z en las dos primeras ecuaciones del sistema inicial, se obtiene

$$-4x + 4y = 16$$
$$6x - 2y = -16$$

Resultando un sistema más sencillo del que se obtiene

$$x = -2, \quad y = 2, \quad u = -2, \quad z = 2.$$

12. Cada uno de los amigos ha recorrido la misma distancia entre los puntos de partida y reunión. (Recuerde: espacio = velocidad × tiempo.) Distinguimos dos partes en la condición.

Roberto ha recorrido la misma distancia que Pablo:

$$ct_1 - ct_2 + ct_3 = ct_1 + pt_2 + pt_3$$

Pablo ha recorrido la misma distancia que Pedro:

$$ct_1 + pt_2 + pt_3 = pt_1 + pt_2 + ct_3$$

Esta última ecuación da:

$$(c - p)t_1 = (c - p)t_3$$

Suponemos, claro está, que la velocidad del automóvil es superior a la de un peatón, $c > p$. Se deduce pues

$$t_1 = t_3;$$

es decir, que Pedro camina exactamente lo mismo que Pablo. De la primera de las dos ecuaciones anteriores se deduce

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{c + p}{c - p}$$

lo que, naturalmente, también es el valor de $\frac{t_1}{t_2}$. De donde se obtienen las respuestas:

$$\frac{c(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c(c + 3p)}{3c + p} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c - p}{3c + p} \qquad \text{(b)}$$

En efecto, $0 < p < c$. (c)

Hay dos casos extremos:

Si $p = 0$, (a) resulta $\frac{c}{3}$ y (b) $\frac{1}{3}$

Si $p = c$, (a) resulta c y (b), 0.

Es fácil ver estos resultados sin cálculos.

13. Se descompone fácilmente la condición en cuatro partes expresadas por las cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} a - d + bg^{-1} &= 85 \\ a + b &= 76 \\ a + d + bg &= 84 \\ 3a &= 126 \end{aligned}$$

De la última ecuación se obtiene $a = 42$, después, de la segunda, $b = 34$. Sumando las otras dos ecuaciones (a fin de eliminar d), se tiene

$$2a + b\,(g^{-1} + g) = 169.$$

Dado que a y b se conocen ya, se tiene aquí una ecuación de segundo grado en g, de la que resulta

$$g = 2, \quad d = -26 \quad \text{ó} \quad g = \tfrac{1}{2}, \quad d = 25$$

Las progresiones son

$$\begin{matrix} 68, & 42, & 16 & & 17, & 42, & 67 \\ & & & \text{ó} & & & \\ 17, & 34, & 68 & & 68, & 34, & 17 \end{matrix}$$

14. Si a y $-a$ son las raíces de menor valor absoluto, serán consecutivas en la progresión que tiene, por lo tanto, la forma

$$-3a, \qquad -a, \qquad a, \qquad 3a.$$

El primer miembro de la ecuación propuesta debe ser, pues, de la forma

$$(x^2 - a^2)\,(x^2 - 9a^2).$$

Efectuando el producto y comparando los coeficientes de las potencias semejantes, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 10a^2 &= 3m + 2 \\ 9a^4 &= m^2 \end{aligned}$$

La eliminación de a da

$$19m^2 - 108m - 36 = 0$$

De donde

$$m = 6 \quad \text{ó} \quad m = -\frac{6}{19}$$

15. Sean a, b, c, los lados, siendo el último la hipotenusa. Las tres partes de la condición se expresan por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 60 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \\ ab &= 12c \end{aligned}$$

Observando que

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

se obtiene

$$(60 - c)^2 = c^2 + 24c$$

De donde $c = 25$ y ya sea $a = 15$ y $b = 20$ o bien $a = 20$ y $b = 15$ (lo que no cambia nada en el triángulo).

16. Las tres partes de la condición se expresan por

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{x}{a} \\ \operatorname{sen} \beta &= \frac{x}{b} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

La eliminación de a y b da

$$x^2 = \frac{c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma}$$

17. Supongamos que

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Siguiendo el plan de INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, preguntémonos si la fórmula supuesta sigue siendo cierta cuando se pasa de n a $n + 1$. Se tendría que tener igualmente

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

Verifiquémoslo restando de ésta la primera ecuación:

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = -\frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

lo que se reduce a

$$\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

siendo esta última ecuación manifiestamente exacta para $n = 1, 2, 3 \ldots$; lo cual, según el plan recordado aquí, demuestra nuestra hipótesis.

18. En la n-ésima línea, el segundo miembro parece ser n^3, siendo el primer miembro una suma de n términos. El último término de dicha suma es el m-ésimo número impar o $2m-1$, donde

$$m = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

véase INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, 4. El último término de la suma del primer miembro deberá ser pues

$$2m - 1 = n^2 + n - 1$$

Se puede deducir de ello el primer término de la suma, considerando a ésta de *dos* maneras: bien regresando $n - 1$ pasos a partir del último término, lo que da

$$(n^2 + n - 1) - 2(n - 1) = n^2 - n + 1,$$

bien añadiendo un término al último de la línea precedente, lo que da

$$[(n-1)^2 + (n-1) - 1] + 2$$

lo que, después de una simplificación sencilla, se reduce a la misma expresión: ¡Bien! Afirmamos, pues, que

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \ldots + (n^2 + n - 1) = n^3$$

donde el primer miembro es la suma de n términos sucesivos de una progresión aritmética cuya razón es 2. Si el lector conoce la regla que da la suma de una progresión tal (media aritmética del primero y del último término, multiplicada por el número de términos), podrá verificar que

$$\frac{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)}{2} n = n^3$$

y demostrar así la afirmación.

(Se puede fácilmente demostrar la regla citada por medio de una figura un poco diferente a la fig. 14).

19. El perímetro del hexágono regular de lado n es $6n$. Se compone, pues, de $6n$ líneas límites y de $6n$ vértices. Pasando de $n - 1$ a n, V aumenta $6n$ unidades, de donde

$$V = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 3n^2 + 3n + 1$$

véase INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, 4. Tres de las diagonales que pasan por el centro del hexágono lo dividen en seis (grandes) triángulos equiláteros. Considerando uno de estos últimos, se tiene

$$T = 6(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) = 6n^2$$

(según la regla que da la suma de una progresión aritmética, recordada en la solución del problema 18). Los T triángulos tienen $3T$ lados comunes. En ese total $3T$, cada línea de división interior de longitud 1 se cuenta dos veces, mientras que los $6n$ lados no se cuentan sino una vez. De donde:

$$2L = 3T + 6n, \qquad L = 9n^2 + 3n$$

(Para el lector más avanzado: resulta, del teorema de Euler sobre los poliedros, que $T + V = L + 1$. Verificar esta relación.)

20. He aquí una serie bien ordenada de problemas análogos. Calcular A_n, B_n, C_n, D_n y E_n, que representan cada una de estas cantidades el número de maneras de pagar la cantidad de n centavos y se diferencian de las otras por las monedas utilizadas. Se tendrá

A_n monedas de 1 centavo,
B_n monedas de 1 y 5 centavos,
C_n monedas de 1, 5 y 10 centavos,
D_n monedas de 1, 5, 10 y 25 centavos,
E_n monedas de 1, 5, 10, 25 y 50 centavos.

Ya han sido empleados los símbolos E_n y A_n (ahora se ve por qué).

Todos los medios y formas de pagar la cantidad de n centavos con las cinco monedas quedan expresados por E_n.

Podemos, sin embargo, distinguir dos casos:

1º No se utilizan más que monedas de 50 centavos. El número de maneras de pagar es, por definición, D_n,

2º Se utiliza una (o más de una) moneda de 50 centavos. Después de depositar la primera moneda de 50 centavos sobre el mostrador queda por pagar $(n - 50)$ centavos, lo que se puede hacer de E_{n-50} formas exactamente.

Se deduce de ello

$$E_n = D_n + E_{n-50}$$

De igual modo

$$D_n = C_n + D_{n-25}$$
$$C_n = B_n + C_{n-10}$$
$$B_n = A_n + B_{n-5}$$

Un poco de atención muestra que esas fórmulas siguen siendo válidas haciendo

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1$$

(lo que manifiestamente tiene un sentido) y considerando como nula toda cantidad tal como A_n, B_n ... E_n, cuyo índice resulte negativo. (Por ejemplo $E_{25} = D_{25}$, como se puede ver de inmediato y lo cual es compatible con nuestra primera fórmula puesto que $E_{25-50} = E_{-25} = 0$.)

Las fórmulas nos permiten calcular las cantidades previstas por vía *regresiva*, es decir, volviendo a valores de n inferiores o a letras del alfabeto precedentes. Se puede, por ejemplo, calcular C_{30} por una simple suma, si se conocen ya C_{20} y B_{30}. En la lista que sigue, la primera línea, correspondiente a A_n, y la primera columna, correspondiente a 0, no contienen más que el número 1. (¿Por qué?) Partiendo de esos primeros números, se calculan los otros por vía regresiva, gracias a simples sumas: cualquier otro número de la lista es igual, ya sea al que está colocado encima de él o a la suma de dos números: el que está encima de él y otro situado a la izquierda, en el rango correspondiente. Por ejemplo

$$C_{30} = B_{30} + C_{20} = 7 + 9 = 16$$

El cálculo se ha efectuado hasta $E_{50} = 50$; *se puede pagar la cantidad de 50 centavos de 50 formas diferentes exactamente.*

Siguiendo adelante, el lector podrá verificar que $E_{100} = 292$: *se puede cambiar un peso de 292 maneras diferentes:*

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
D_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49
E_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	50

Esta obra se terminó de imprimir y encuadernar
el día 22 de febrero de 1989,
en los talleres de Impresora Roma, S. A.,
Tomás Vázquez 152 Col. Ampliación Moderna,
Deleg. Iztacalco, 03510, México, D. F.,
se tiraron
2 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

nes", plantea problemas más complejos con sugerencias para llegar a la solución. Este volumen ofrece al profesor la gran oportunidad de desarrollar el gusto de sus alumnos por las matemáticas, ya que le muestra la forma de plantear y resolver problemas por medio de preguntas y respuestas estimulantes, de acuerdo con el grado de conocimientos de los estudiantes.

OBRAS AFINES

Manual de lógica para estudiantes de matemáticas

Gonzalo Zubieta Rossi

Esta obra constituye una valiosa ayuda para la mejor comprensión del lenguaje matemático. Contiene las técnicas de orden lógico para el manejo de dicho lenguaje y explica el uso de métodos eficaces de razonamiento, en vista de que muchas de las dificultades con que tropiezan los estudiantes de matemáticas se debe a falta de familiaridad con estos aspectos.

Didáctica de la matemática moderna

Emma Castelnuovo

Esta obra contiene un valioso análisis de las corrientes pedagógicas y psicológicas que más han influido en la enseñanza. Se estudian las aportaciones de Comenio, Pestalozzi, Decroly, Montessori, Piaget, Aebli, Jhoannet, etc., a la metodología de la enseñanza, en una secuencia que nos conduce de la didáctica general de la matemática a la particular.